97. Sur Quelques Relations concernant les Opérations P_α et S_α sur les Classes d'Ensembles

Par Tadashi OHKUMA
Section des Mathématiques, Institut Technologique, Tokyo
(Comm. by Z. SUETUNA, M.J.A., July 12, 1955)

1. Soit K une classe d'ensembles. On désigne par $P_\alpha(K)$ (resp. $S_\alpha(K)$), la classe de tous les ensembles qui sont intersections (resp. réunions) des moins que $\aleph_\alpha$ ensembles appartenant à K. Ainsi on a des opérations P_α et S_α définies sur les classes d'ensembles. En général, pour deux opérations F et G sur les classes d'ensembles, nous définissons leur produit FG par la formule

$(FG)(K)=F(G(K))$ pour toute classe K d'ensembles, et nous écrivons $F\leqq G$, si

$F(K)\subseteqq G(K)$, pour toute classe K d'ensembles.

2. MM. W. Sierpinski, A. Tarski, A. Koźniewski, et A. Lindenbaum ont discuté une condition pour qu'on ait

(1) $$P_\alpha S_\beta \leqq S_\gamma P_\delta$$

et celle pour qu'on ait

(2) $$P_\alpha S_\beta = S_\gamma P_\delta.$$ [1]

Et, ils ont obtenu les résultats suivants.

Théorème A. *Pour qu'on ait l'inégalité (1), il faut et il suffit que $\alpha\leqq\delta$ et que la condition suivante soit remplie:*

Condition (π) pour toute famille $\{\mathfrak{m}_\lambda;\lambda\in\Lambda\}$ des nombres $\mathfrak{m}_\lambda$ cardinaux, $\overline{\overline{\Lambda}}<\aleph_\alpha$ et $\mathfrak{m}_\lambda<\aleph_\beta(\lambda\in\Lambda)$ entrainent $\prod_{\lambda\in V}\mathfrak{m}_\lambda<\aleph_\gamma$.

Théorème B. *Pour qu'on ait l'égalité (2), il faut et il suffit que $\alpha=\beta=\gamma=\delta$ et ces nombres ordinaux soient fortement inaccessibles (c'est-à-dire, pour toute famille $\{\mathfrak{m}_\lambda;\lambda\in\Lambda\}$ des nombres $\mathfrak{m}_\lambda$ cardinaux, $\overline{\overline{\Lambda}}<\aleph_\alpha$ et $\mathfrak{m}_\lambda<\aleph_\alpha(\lambda\in\Lambda)$ entrainent $\prod_{\lambda\in\Lambda}\mathfrak{m}_\lambda<\aleph_\alpha$).*

Maintenant, en se servant leurs résultats, nous avons obtenu les conditions pour qu'on ait plusieurs inégalités et égalités entre les terms $P_{\alpha_1}S_{\beta_1}$, $S_{\alpha_2}P_{\beta_2}$, $P_{\alpha_3}S_{\beta_3}P_{\gamma_3}$, et $S_{\alpha_4}P_{\beta_4}S_{\gamma_4}$. Le but de cette note est de mentionner seulement ces résultats obtenus, et leurs démonstrations et considerations détailles seront publiées ailleurs.

3. Les lemmes suivants sont fondamentaux pour notre discussion.

Lemme 1. *Soient $F(S_{\alpha_1},\dots,S_{\alpha_m};P_{\beta_1},\dots,P_{\beta_n})$ et $G(S_{\gamma_1},\dots,S_{\gamma_s};P_{\delta_1},\dots,P_{\delta_t})$ (m,n,s, et t sont nombres naturels) daux nomônes des opérations S_{α_i}, P_{β_i}, S_{γ_i}, et P_{δ_i}. Alors,*

1) Cf. [1] et [2].