92. *Sur l'Existence des Solutions des Équations Différentielles Ordinaires*

Par Masuo HUKUHARA

Institut de Mathématiques, Université de Tokyo

(Comm. by Z. SUETUNA, M.J.A., July 12, 1955)

1. Position du problème. Soit donnée une équation différentielle

$$\vec{y}'=\vec{f}(x, \vec{y}), \tag{1}$$

dont le second membre est continu dans $\mathfrak{D}$. M. M. Nagumo a appelé ensemble permettant à droite (gauche) un ensemble E tel qu'il existe dans E une courbe solution issue à droite (gauche) d'un point quelconque de E. Nous avons donné la condition nécessaire et suffisante pour qu'un sous-ensemble de D fermé dans lui soit permettant à droite.[1] Nous voulons étendre ce résultat au cas où $\vec{f}(x, \vec{y})$ est continue par rapport à $\vec{y}$ et mesurable par rapport à x.

2. Hypothèses. Supposons les hypothèses suivantes remplies:

(i) $\vec{f}(x, \vec{y})$ est continue par rapport à $\vec{y}$;

(ii) $\vec{f}(x, \vec{\varphi}(x))$ est mesurable quelle que soit la fonction continue $\vec{\varphi}(x)$ telle que $(x, \vec{\varphi}(x)) \in \mathfrak{D}$;

(iii) $\vec{f}(x, \vec{y})$ est également sommable par rapport à x en chaque point de $\mathfrak{D}$, c'est-à-dire on peut faire correspondre à chaque point $(a, \vec{b})$ de $\mathfrak{D}$ un voisinage $U(a, \vec{b})$ et une fonction sommable $F(x, a, \vec{b})$ définie dans un voisinage de a de manière que l'on ait

$$|\vec{f}(x, \vec{y})| \leqq F(x, a, \vec{b})$$

dans $U(a, \vec{b})$.

Une fonction continue $\vec{\varphi}(x)$ est dite une solution si l'on a

$$\vec{\varphi}(x)=\vec{\varphi}(a)+\int_a^x \vec{f}(x, \vec{\varphi}(x))\, dx, \tag{2}$$

la courbe $\vec{y}=\vec{\varphi}(x)$ appartenant à $\mathfrak{D}$. Il est clair que cette définition est indépendante de la choix de la valeur a.

3. Topologies droite et gauche. Un ensemble majorant à droite (gauche) dans D est un ensemble E tel qu'une courbe solution issue à droite (gauche) d'un point quelconque de E et contenue dans D soit contenue dans E.

Cela posé, nous introduisons deux topologies, topologie droite $\mathfrak{T}^+$ et topologie gauche $\mathfrak{T}^-$. La topologie droite $\mathfrak{T}^+$, par exemple, est

1) M. Hukuhara: Théorèmes fondamentaux de la théorie des équations différentielles ordinaires, I, II, III, Sūbutu Kwaisi, **5**, 325–337 (1931); ibid., **6**, 134–147, 285–295 (1932). M. Nagumo: Über die Lage der Integralkurven gewöhnlicher Differentialgleichungen, Proc. Phys.-Math. Soc. Japan, **24**, 551–559 (1942).