118. Einfacher Beweis eines Brauerschen Satzes über Gruppencharaktere

Von Keizo ASANO

(Comm. by K. SHODA, M.J.A., Oct. 12, 1955)

Der Zweck dieser Note ist den folgenden fundamentalen Satz von R. Brauer[1] elementar zu beweisen:

Jeder Charakter χ *einer endlichen Gruppe* $\mathfrak{G}$ *kann aus den von Charakteren* ω *der elementaren Untergruppen*[2] *induzierten Charakteren* ω^* *ganzzahlig linear kombiniert werden.*

Gleichzeitig beweisen wir auch den folgenden Brauerschen Satz.[3]

Eine auf $\mathfrak{G}$ *definierte komplex-wertige Funktion* θ *ist dann und nur dann ein verallgemeinerter Charakter von* $\mathfrak{G}$, *wenn die folgenden zwei Bedingungen erfüllt sind.*

(1) θ *ist eine Klassenfunktion, d.h.* $\theta(s)=\theta(t^{-1}st)$ $(s, t \in \mathfrak{G})$.

(2) *Für jede elementare Untergruppe* $\mathfrak{H}$ *von* $\mathfrak{G}$ *ist* θ *auf* $\mathfrak{H}$ *betrachtet ein verallgemeinerter Charakter von* $\mathfrak{H}$.

Es seien im folgenden

$\mathfrak{G}$ eine endliche Gruppe der Ordnung g,
ζ eine primitive g-te Einheitswurzel,
p eine Primzahl,

$$g=p^r g', \qquad (g', p)=1,$$

I der Ring der ganzen rationalen Zahlen,
I_p der Ring der p-ganzen rationalen Zahlen,
$\mathfrak{R}$ der Charakterring von $\mathfrak{G}$,
$\mathfrak{R}_0$ der von allen oben genannten Charakteren ω^* erzeugte Modul.

Hilfssatz 1. ψ sei eine auf $\mathfrak{G}$ definierte Klassenfunktion mit $\psi(s) \in I_p[\zeta]$ für jedes s aus $\mathfrak{G}$. Ist $\psi(s)\equiv 0 \pmod{p^r}$, so ist $\psi \in I_p[\zeta]\mathfrak{R}_0$. Ist insbesondere $(p, g)=1$ so gehört jedes ψ zu $I_p[\zeta]\mathfrak{R}_0$.

Diesen Beweis habe ich im vorigen Jahre in meiner Vorlesung über Gruppencharaktere in Nagoya Universität vorgetragen. Als Prof. Brauer nach dem internationalen Symposium über algebraische Zahlentheorie Osaka Universität besuchte, hatte ich eine günstige Gelegenheit diesen Beweis mit ihm zu besprechen. Er sagte mir, dass er und Tate denselben Beweis erhalten haben. Wie Prof. Brauer freundlich bemerkte, ist mein Beweis ganz ähnlich wie ihrer, obwohl die beiden Beweise völlig unabhängig erhalten wurden.

1) R. Brauer: On Artin's L-series with general group characters, Ann. Math., **48**, 503 (1947).

2) Eine Untergruppe heisst elementar, wenn sie ein direktes Produkt einer zyklischen Gruppe und einer p-Gruppe.

3) R. Brauer: A characterization of the characters of groups of finite order, Ann. Math., **57**, 357 (1953).