8. *Théorème de Krein-Milman et le Balayage de Mesures dans la Théorie du Potentiel. II*

Par Shin-ichi MATSUSHITA

(Comm. by K. KUNUGI, M.J.A., Jan. 12, 1956)

Dans §§ 4–5, nous continuerons à étudier la mesure balayée pour un domaine compact exposée dans une Note précédente,[1] et les propriétés du potentiel de cette mesure. Ensuite, nous envisageons la relation entre l'ensemble des points extrémaux *Ext.* $M^{\wedge}(D)$ de $M^{\wedge}(D)$ et les points-frontières réguliers, et finalement nous donnerons une solution du problème généralisé de Dirichlet.

§ 4. **Potentiel d'une mesure balayée 1.** Dans ce qui suit, comme la définition de la capacité d'un ensemble, nous adoptons celle de M. C. de La Vallée Poussin; c'est à dire qu'on appelle *capacité d'un compact* K, notée $c(K)$, la borne suppérieure de normes des mesures positives ν réparties sur K telles que $U^{\nu} \leqq 1$: pour un ensemble quelconque A, *la capacité intérieure* $c(A)$ est défine par $\sup_{k \subset A} c(K)$. Conformément à la définition, $c(A) > 0$ entraîne qu'il existe une mesure ν avec son support compact contenu dans A et vérifiant $U^{\nu} < +\infty$.[2] On dit encore qu'une propriété borélienne a lieu *à peu près partout* (*à p. p. p.*) sur A si le sous-ensemble de A qui ne possède pas cette propriété est de capacité intérieure nulle.[3]

Or, en vertu de l'égalité (3.5), on a $U^{\mu} = U^{\mu_{\Gamma}}$ *à p. p. p.* sur Γ quelle que soit $\mu \in \mathfrak{M}_0^+(D)$: s'il n'en est pas ainsi, il existait une $\nu \in \mathfrak{M}_0^+(\Gamma)$ de l'énergie finie, vérifiant $\int U^{\mu} d\nu > \int U^{\mu_{\Gamma}} d\nu$, ce qui est contradictoire avec (3.5) parce que ν elle-même peut être considérée comme une mesure balayée de ν et donc $\nu_{\Gamma}^0 = \nu$ (d'après l'unicité du balayage pour le cas où μ_{Γ}^0 est de l'énergie finie, au § 3).

Proposition 3. *Pour toute mesure* $\nu \in \mathfrak{M}(E - \overline{D})$ *ou mesure de l'énergie finie* $\nu \in \mathfrak{M}(E - D)$, *on a* $\int U^{\mu} d\nu = \int U^{\mu_{\Gamma}} d\nu$ *et, en particulier,* $U^{\mu}(x) = U^{\mu_{\Gamma}}(x)$ *partout sur* $E - \overline{D}$ *et à p. p. p. sur* Γ. *De plus,* $\int d\mu = \int d\mu_{\Gamma}$.

La dernière égalité découle aisément en prenant la mesure sphérique λ_0 sur $\Sigma \supset \overline{D}$ et vérifiant $U^{\lambda_0}(x) = 1$ sur l'intérieur de Σ.

1) Proc. Japan Acad., **31**, 643–647 (1955), Nous renvoyons à cette Note dont nous conservons la terminologie et les notations.

2) Cette ν est nécessairement *de l'énergie finie.*

3) Ce mot a été introduit par M. M. Brelot.