30. *Sur un Théorème de Gelfand*

Par Shouro KASAHARA
Université de Kobe

(Comm. by K. KUNUGI, M.J.A., Feb. 13, 1956)

Il est bien connu[1] que l'ensemble des éléments inversibles d'une algèbre de Banach est un ouvert, et *a fortiori* dans l'algèbre des endomorphismes continus d'un espace de Banach, l'ensemble des éléments inversibles est un ouvert.

Dans cette note, nous considérons la réciproque de cette proposition pour une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E, E)$ des endomorphismes continus d'un espace vectoriel localement convexe[2] séparé E. De façon précise:

PROPOSITION 1. *Soient E un espace localement convexe séparé sur le corps des nombres réels, et $\mathfrak{S}$ un ensemble de disques[3] bornés fermés de E tel que l'espace vectoriel engendré par leur réunion soit identique à E. Si, dans une sous-algèbre $\mathfrak{A}_{\mathfrak{S}}$ de $\mathcal{L}(E, E)$ contenant des applications linéaires continues de rang[4] 1 et l'application identique e de E, l'ensemble des éléments inversibles est ouvert, E et $\mathfrak{A}_{\mathfrak{S}}$ sont normables.*

Nous entendons par $\mathfrak{A}_{\mathfrak{S}}$, l'algèbre $\mathfrak{A}$ munie de la topologie de la $\mathfrak{S}$-convergence, et désignons par $W(B, V)$ l'ensemble des $u \in \mathfrak{A}$ tels que l'on ait $u(x) \in V$ quel que soit $x \in B$, où B et V sont deux parties de E.[5]

Dire que l'ensemble des éléments inversibles de l'algèbre $\mathfrak{A}_{\mathfrak{S}}$ est ouvert signifie qu'il existe un voisinage disqué V de 0 dans l'espace E et un élément B de $\mathfrak{S}$ tels que chaque élément de $W(B, V)+e$ soit inversible. En conséquence, pour démontrer la Proposition 1, il suffira de prouver la

PROPOSITION 2. *Employons les mêmes notations que dans la Proposition 1. S'il existe un voisinage de l'application identique e*

---

1) Cf. I. Gelfand: Normierte Ringe, Rec. Math. (Mat. Sbornik) N. S., **9**, 3–24 (1941).

2) Pour la définition de l'espace vectoriel localement convexe, voir N. Bourbaki: Espaces vectoriels topologiques, Chaps. I–II, Hermann, Paris (1953).

3) Une partie d'un espace vectoriel est dite un *disque* si elle est convexe et symmétrique.

4) Soit u une application linéaire d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F; la dimension du sous-espace $u(E)$ de F est appelée le *rang* de u. Cf. N. Bourbaki: Algèbre, Chap. II, Hermann, Paris (1947).

5) Lorsque V et B parcourent le système fondamental de voisinages de 0 dans E et l'ensemble $\mathfrak{S}$ respectivement, les ensembles $W(B, V)$ forment un système de voisinages de 0 dans $\mathfrak{A}$; cette topologie est appelée de la *$\mathfrak{S}$-convergence*.