19. Über die eindeutige Darstellung der Ideale als Durchschnitt schwacher Primärideale

Von Shinziro MORI
Mathematisches Institut, Hiroshima Universität, Japan
(Comm. by Z. SUETUNA, M.J.A., Feb. 13, 1956)

Es sei $\mathfrak{R}$ ein kommutativer Ring mit Einheitselement, in dem sich jedes Ideal als Durchschnitt von endlich vielen schwachen Primäridealen darstellen lässt.[*] Dann gilt nach der Endlichkeit der Teilerkette von Halbprimidealen verständlicherweise

Hilfssatz 1. *Es sei in der Teilerkette von Idealen aus* $\mathfrak{R}$

$$\mathfrak{a}_1 \subset \mathfrak{a}_2 \subset \mathfrak{a}_3 \subset \cdots$$

jedes Ideal kein Nilideal in bezug auf das vorangehende. Dann bricht die Kette im Endlichen ab.

Es ergibt sich hieraus

Hilfssatz 2. *Ist die Darstellung* $\mathfrak{a}=\mathfrak{q}_1 \frown \mathfrak{q}_2 \frown \cdots \frown \mathfrak{q}_n$ *eines Ideals* $\mathfrak{a}$ *aus* $\mathfrak{R}$ *eindeutig, so sind alle* $\mathfrak{q}_i$ *die isolierten Primärkomponenten von* $\mathfrak{a}$.

Zum Beweis seien $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \cdots, \mathfrak{q}_s$ isoliert und $\mathfrak{q}_{s+1}, \cdots, \mathfrak{q}_n$ nicht isoliert. Es sei ferner $\mathfrak{p}_n$ das zu $\mathfrak{q}_n$ gehörige Primideal, welches ein Teiler von $\mathfrak{p}_1$, aber, kein Teiler von $\mathfrak{p}_{s+1}, \cdots, \mathfrak{p}_{n-1}$ ist. Dann können wir ein Element d_1 in $\mathfrak{q}_{s+1} \frown \cdots \frown \mathfrak{q}_n$, aber ausserhalb von $\mathfrak{p}_i$ $(i=1, 2, \cdots, s)$ finden. Daraus erhalten wir $\mathfrak{a}=\mathfrak{q}_1 \frown \cdots \frown \mathfrak{q}_s \frown (d_1, \mathfrak{a})$, und nach der Eindeutigkeit der Darstellung von $\mathfrak{a}$ $(d_1, \mathfrak{a})=\mathfrak{q}_1' \frown \cdots \frown \mathfrak{q}_t' \frown \mathfrak{q}_{s+1} \frown \cdots \frown \mathfrak{q}_n$, und dabei gehört $\mathfrak{p}_i$ $(i=1, 2, \cdots, s)$ nicht zu $(d_1, \mathfrak{a})$. Ist $\mathfrak{q}_n$ nicht isoliert in bezug auf $(d_1, \mathfrak{a})$, so suchen wir in $\mathfrak{q}_{s+1} \frown \cdots \frown \mathfrak{q}_n$ ein Element d_2 auf, welches nicht nilpotent in bezug auf $(d_1, \mathfrak{a})$ ist. Dann gilt wieder

$$\mathfrak{a}=\mathfrak{q}_1 \frown \cdots \frown \mathfrak{q}_s \frown (d_1, d_2, \mathfrak{a}),\ (d_1, d_2, \mathfrak{a})=\mathfrak{q}_1'' \frown \cdots \frown \mathfrak{q}_u'' \frown \mathfrak{q}_{s+1} \frown \cdots \frown \mathfrak{q}_n.$$

Durch wiederholte Anwendung dieses Verfahrens erhalten wir nach Hilfssatz 1 endlich

---

*) Es sei $\mathfrak{R}$ ein kommutativer Ring ohne irgendwelche Bedingung. Jedes Ideal ist dann und nur dann als Durchschnitt von endlich vielen schwachen Primäridealen darstellbar, wenn in $\mathfrak{R}$ folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. Jede Teilerkette von Halbprimidealen bricht im Endlichen ab.
2. Jede Kette $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}:(b) \subset \mathfrak{a}:(b^2) \subset \cdots$ für ein beliebiges Element b bricht im Endlichen ab, und der letzte Idealquotient $\mathfrak{d}_1$ heisst Grenzideal von $\mathfrak{a}$. Wenn wir von neuem die Kette $\mathfrak{d}_1 \subset \mathfrak{d}_1:(b_1) \subset \mathfrak{d}_1:(b_1^2) \subset \cdots$ für ein Element b_1 bilden, so gewinnen wir auch ein Grenzideal $\mathfrak{d}_2$ von $\mathfrak{d}_1$. Wenn wir in solcher Weise eine Teilerkette $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{d}_1 \subset \mathfrak{d}_2 \subset \cdots$ von Grenzidealen $\mathfrak{d}_i$ erzeugen, liegt die Länge der Kette unterhalb einer mit $\mathfrak{a}$ fest gegebenen Schranke.

Vgl. S. Mori: Über kommutative Ringe mit der Teilerkettenbedingung für Halbprimideale, Jour. Sci. Hiroshima Univ., **16**, 247-260 (1952).