50. *Application de la Méthode des Espaces Rangés à la Théorie de l'Intégration. I*

Par Kinjirô KUNUGI, M.J.A.

(Comm. April 12, 1956)

§1. Pour généraliser la notion des espaces métrique (ou distanciés), nous avons introduit les espaces rangés.[1] Dans cette Note, nous allons montrer comment nous pouvons appliquer cette notion à définir les intégrales.

Pour fixer les idées, considérons les fonctions à valeurs réelles $y=f(x)$ d'une variable réelle x, définie sur l'intervalle $[a,b]=a\leq x\leq b]$, où a,b sont deux nombres réels quelconques tels que $a<b$. Nous disons qu'une fonction à valeurs finies $f(x)$ est en escalier[2] s'il existe un nombre fini des points de division $a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}$ tels que

$$a_0=a<a_1<a_2<\cdots<a_{n-1}<a_n=b$$

et que $f(x)$ soit constante dans chacun des sous-intervalles ouverts $a_{i-1}<x<a_i$, $i=1,2,\cdots,n$. Posons $f(x)=\alpha_i$ pour $a_{i-1}<x<a_i$. La totalité des fonctions en escalier sera désignée par ε. Cette classe des fonctions joue le rôle de celle des fonctions élémentaires au sens de M. M. Stone.[3] En effet, en posant

$$E(f)=\int_a^b f(x)dx=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(a_i-a_{i-1}) \tag{1}$$

nous pouvons voir les trois propositions suivantes qu'on peut regarder comme axiomes de l'intégrale.

(I) $cf, f+g$ et $|f|$ appartiennent à ε dès que f,g appartiennent à ε (c étant un nombre réel fini quelconque). E est une opération à valeurs réelles finies définie sur ε. On a

$$E(cf)=cE(f),\ E(f+g)=E(f)+E(g),\ E(|f|)\geq 0.$$

(II) Si les fonctions f_n $(n=1,2,\cdots)$ et f appartiennent à ε et si l'inégalité $|f|\leq\sum_{n=1}^{\infty}|f_n|$ a lieu, on a $E(|f|)\leq\sum_{n=1}^{\infty}E(|f_n|)$.

(III) La constante $f(x)=1$ $(a\leq x\leq b)$ appartient à ε. M. M. Stone a introduit d'une manière abstraite (en appelant fonction élémentaire toute fonction d'une classe donnée d'avance qui satisfait à trois

1) K. Kunugi: Sur les espaces complets et régulièrement completes. I et II, Proc. Japan Acad., **30**, 553–556, 912–916 (1954).

2) Voir F. Riesz: C. R. Acad. Sci., Paris, **154**, 641 (1912); F. Riesz et B. Sz.-Nagy: Leçons d'Analyse Fonctionnelle, Budapest, 29 (1952).

3) M. Stone: Notes on integration I, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., **34**, 336–342 (1948).