71. Sur un Espace Complet de Mesures Positives dans la Théorie du Potentiel

Par Makoto OHTSUKA
Institut de Mathématiques, Université de Nagoya
(Comm. by K. KUNUGI, M.J.A., May 15, 1956)

Introduction. H. Cartan [2, 3, 4] a developpé la théorie du potentiel newtonien, en utilisant le fait que les mesures positives d'énergie finie forment un espace métrique complet. Mais il s'est appuyé fortement sur les propriétés de l'espace comme un groupe topologique. Si l'espace n'est pas un groupe topologique, une surface de Riemann étant un exemple, on ne sait pas en général si l'espace de mesures positives d'énergie finie est complet.

Dans le présent mémoire nous considérons les potentiels pris par rapport à un noyau général dans un espace localement compact, et démontrerons que l'espace des mesures positives d'énergie finie portées par un compact fixe est complet si on considère des noyaux particuliers.

1. Soit Ω un espace localement compact, et $\Phi(P, Q)$ une fonction numérique positive continue symétrique dans $\Omega\times\Omega$, la valeur $+\infty$ n'étant admise au plus que sur l'ensemble diagonal de $\Omega\times\Omega$. Cette fonction sera applée un *noyau*. Pour une mesure positive μ, on définit l'intégrale

$$\int_\Omega \Phi(P, Q)\, d\mu(Q)$$

et on l'appelle le *potentiel* engendré par μ. Il sera noté $U^\mu(P)$.

Pour deux mesures positives μ et ν, on désignera par (μ, ν) l'intégrale

$$\int_\Omega U^\mu(P)\, d\nu(P)=\int_\Omega U^\nu(P)\, d\mu(P).$$

L'énergie d'une mesure positive μ est définie par (μ, μ). L'ensemble des mesures positives d'énergie finie sera noté $\mathfrak{E}$.

Nous ne considérons désormais que les noyaux tels que les potentiels pris par rapport à ces noyaux satisfont aux deux principes suivants:

Principe d'énergie: $(\mu-\nu, \mu-\nu)=(\mu, \mu)+(\nu, \nu)-2(\mu, \nu)\geqq 0$ *pour tous* $\mu, \nu\in\mathfrak{E}$; *l'égalité a lieu si et seulement si* $\mu\equiv\nu$.

Il suit tout de suite que $(\mu, \nu)^2\leqq(\mu, \mu)(\nu, \nu)$.

Principe de continuité: *Si le potentiel engendré par une mesure positive à support compact est continu comme une fonction sur le*