101. *Laplacien Local et la Décomposition de F. Riesz*

Par Shin-ichi MATSUSHITA

(Comm. by K. KUNUGI, M.J.A., July 12, 1956)

§1. Dans mes Notes précédentes,[1] j'exposai quelques résultats sur un théorème fondamental de F. Riesz relatif à la décomposition de fonctions surharmoniques: les principales propositions établies dans ces Notes s'énoncent comme suit (sous quelque peu de corrections d'expression et typographiques).

Étant donné un domaine D quelconque dans l'espace euclidien à n dimensions ($n\geqq 3$) E^n, muni de la distance (euclidienne) $r(x, y)$, nous désignerons: $\mathfrak{M}^+(D)=$cône convexe des mesures de Radon positives dans $D, \Gamma(D)=$ensemble convexe constitué des fonctions surharmoniques, et $L^+(D)=$ensemble convexe des fonctions $\geqq 0$ à supports compacts dans D. Désignons encore par $\mathfrak{M}(D)$, $\Pi(D)$, et $L^0(D)$ enveloppes linéaires sur le corps réel de $\mathfrak{M}^+(D)$, $\Gamma(D)$, et de $L^+(D)$ respectivement.[†] C^p désignera fonctions possédant des dérivées partielles continues jusqu'à l'ordre p inclus, $1\leqq p\leqq +\infty$.

Proposition 1 (Prop. 2 [1]). *Pour toute* $\mu\in\mathfrak{M}(D)$, *on a* $\phi_D(U^\mu)=\mu$.

Ici ϕ_D est une application linéaire de $\Pi(D)$ dans $\mathfrak{M}(D)$ définie par

$$\langle\phi_D(f)\rangle(\varphi)=\int f(-\Delta\varphi)dx, \quad \Delta\varphi=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i^2} \tag{1.1}$$

pour $f\in\Pi(D)$, $\varphi\in L^0(D)\frown C^2$ (ϕ_D est positive sur le produit $\Gamma(D)\times(L^+(D)\frown C^2)$,[2] et celui-ci étant positivement riche dans $L^+(D)$, $\phi_D(f)$ peut se prolonger à une mesure positive tant que $f\in L^+(D)$),[3] et U^μ désigne le potentiel newtonien:

$$U^\mu(x)=\frac{\Gamma(n/2)}{2(n-2)\pi^{n/2}}\int r^{2-n}(x, y)\,d\mu(y).$$

Proposition 2 (Prop. 3 [1]). *Pour que* $f\in\Gamma(D)$ (*ou* $\in H(D)\equiv\Gamma(D)\frown-\Gamma(D)$), *il faut et il suffit que* $\phi_D(f)\in\mathfrak{M}^+(D)$ (*resp. que* $\phi_D(f)$ *soit nulle*).

Remarquons en passant que $H(D)$ est un espace vectoriel des fonctions harmoniques dans D.

---

1) S. Matsushita: Sur la décomposition de F. Riesz, I et II, C. R. Acad. Sci., Paris, **241**, 1252–1254, 1373–1375 (1955), citées resp. [1] et [2].

†) Tout élément f de $\Pi(D)$ se représente en la forme $f=f_1-f_2$ pour $f_1, f_2\in\Gamma(D)$; si $f_1(x)=f_2(x)=+\infty$, il convient de définir que $f(x)=0$.

2) Prenons un voisinage compact du support de $\varphi\in L^+(D)\frown C^2$ comme B dans Lemme du §**2** et puis appliquons ce Lemme.

3) D'après une proposition de N. Bourbaki: Intégration, Livre **6**, Prop. 2, 56 (1952).