133. *Quelques Conditions pour la Normabilité d'un Espace Localement Convexe*

Par Shouro KASAHARA
Université de Kobe

(Comm. by K. KUNUGI, M.J.A., Oct. 12, 1956)

1. Introduction. Soient E et F deux espaces vectoriels localement convexes sur le corps des nombres réels. Nous désignons par $\mathcal{L}(E, F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues de E dans F, et par $\mathfrak{L}(E, F)$ un sous-espace vectoriel quelconque de $\mathcal{L}(E, F)$ contenant toutes les applications linéaires continues de rang fini. Récemment, MM. A. Blair [1], J. H. Williamson [4] et l'auteur [2] ont montré indépendamment que si l'application $(u, v)\rightarrow u\circ v$ de $\mathfrak{L}(E, E)\times\mathfrak{L}(E, E)$ dans $\mathfrak{L}(E, E)$ est continue pour la topologie de la convergence uniforme sur un ensemble de parties bornées de E, l'espace E est normable. Le but du n° 2 de cette note est de donner une généralisation de cette proposition. D'autre part, dans une Note antérieure [3], nous avons prouvé que l'espace E est normable si l'ensemble des éléments inversibles d'une algèbre $\mathfrak{L}(E, E)$ est ouvert pour la topologie de la convergence uniforme sur un ensemble de parties bornées de E. Concernant ce fait, nous donnerons dans le n° 3 quelques résultats sur des ensembles d'éléments spécifiques de $\mathfrak{L}(E, F)$.

Dans la suite, nous considérons seulement les espaces vectoriels sur le corps des nombres réels, et nous suivons, de façon générale, la terminologie des "Éléments" de M. N. Bourbaki. Soit A (resp. V) une partie de E (resp. F); nous désignons par $W(A, V)$ l'ensemble des $u\in\mathcal{L}(E, F)$ tels que l'on ait $u(x)\in V$ quel que soit $x\in A$, et par $\widetilde{W}(A, V)$ la trace de $W(A, V)$ sur $\mathfrak{L}(E, F)$: $\widetilde{W}(A, V)=W(A, V)\frown\mathfrak{L}(E, F)$. Lorsque $\mathfrak{S}$ est un ensemble de parties bornées de E, nous dénotons par $\mathfrak{L}_{\mathfrak{S}}(E, F)$ l'espace $\mathfrak{L}(E, F)$ muni de la topologie de la convergence uniforme dans les parties $A\in\mathfrak{S}$. Nous écrirons p_V la jauge d'un tonneau V, i.e. $p_V(x)=\inf_{\lambda>0, x\in\lambda V}\lambda$.

2. La continuité de l'application $(u, v)\rightarrow u\circ v$. Pour démontrer la Proposition 1 nous utilisons le lemme suivant qui a été prouvé dans [2] (voir le Lemme 1).

LEMME. *Soient E et F deux espaces localement convexes séparés, un disque*) borné et fermé de E qui ne se réduit pas à 0, et V un*

*) Une partie d'un espace vectoriel est dite *disquée* ou un *disque* si elle est convexe et cerclée.