168. *Sur les Groupes Factorisables par Deux 2-Groupes Cycliques. I*

(*Cas où leur groupe des commutateurs est cyclique*)

Par Noboru Itô et Akiko Ôhara

(Comm. by K. Shoda, M.J.A., Dec. 13, 1956)

1. On dit qu'un groupe G est «factorisable» par deux sous-groupes A et B, si tout élément g de G peut se mettre sous la forme $g=ab$ avec a de A et b de B. Nous avons ainsi un groupe factorisable sous la forme $G=AB=BA$. Parmi les résultats récemment publiés sur ce sujet, les théorèmes suivants sont nécessaires pour l'étude qui va suivre: *soit G un groupe factorisable par deux sous-groupes arbitraires A, B et soit (A, B) le sous-groupe engendré par tous les commutateurs $(a, b)=aba^{-1}b^{-1}$ avec a de A et b de B. Alors (A, B) est toujours un sous-groupe distingué de G [4]; si G est un groupe factorisable par deux sous-groupes abéliens, le groupe des commutateurs G' de G est abélien [2, 4].* En particulier, le cas où G est un groupe factorisable par deux p-groupes cycliques, a été étudié par B. Huppert [1]: *on a $d(G')=1$ pour $p\neq 2$ et $d(G')\leqq 2$ pour $p=2$, où $d(G')$ désigne le nombre des générateurs indépendants de G'*; et de plus, *pour $p=2$, lorsque $A\frown B=1$ G' ne peut être un groupe abélien du type $(2^{\gamma}, 2^{\gamma})$, où γ est un entier positif [3].* Or, nous allons déterminer la structure du groupe factorisable par deux 2-groupes cycliques.

2. Nous considérons d'abord la structure d'un groupe factorisable par deux 2-groupes cycliques dont le groupe des commutateurs G' est cyclique.

Théorème 1. *Soit G un p-groupe, où $p\geqq 2$. Si son groupe des commutateurs G' est cyclique et s'il existe un sous-groupe cyclique N tel que $N\supsetneqq G'$, on peut trouver un sous-groupe cyclique L tel que l'on ait $L\supseteqq N$ et $L\subsetneqq \Phi(G)$, où $\Phi(G)$ est le groupe de Frattini de G.*

En effet, comme G/G' est abélien on peut trouver un groupe quotient cyclique L/G' tel que $L/G'\subsetneqq\Phi(G/G')$, où $L/G'\supseteqq N/G'$. Et de plus, on a $\Phi(G/G')=\Phi(G)G'/G'=\Phi(G)/G'$, car G est un p-groupe. D'où il existe un sous-groupe L tel que $L\supseteqq N$, $L\subsetneqq\Phi(G)$ et que L/G' est cyclique.

Ensuite, montrons que ce sous-groupe L est cyclique. Désignons par $\overline{H}$ le groupe quotient par G' d'un sous-groupe H contenant G'. Soient $N, G', \overline{L}$ engendrés par $n, c, \overline{l}$ respectivement. Soit l'indice $(\overline{L}:\overline{N})=$l'indice $(L:N)=p^m$ avec un entier $m\geqq 0$. On a alors $\overline{l}^{p^m}=\overline{n}^{\gamma}$ avec un certain entier γ, où $\overline{n}$ est la classe à laquelle n appartient.