34. *Une Généralisation du Théorème de Mackey*

Par Shouro KASAHARA
Université de Kobe

(Comm. by K. KUNUGI, M.J.A., March 12, 1957)

Les propositions énoncées dans cette note sont contenues dans un mémoire d'auteur qui paraîtra prochainement,[1] et les démonstrations sont omises. Soient E et F deux espaces vectoriels localement convexes;[2] par $L(E, F)$, nous désignerons l'espace vectoriel des applications linéaires de E dans F, et par $\mathcal{L}(E, F)$ l'espace des applications linéaires *continues* de E dans F.

Sauf mention expresse du contraire, nous désignons par E un espace vectoriel, et par F un espace normé. De plus, nous entendons par $\mathcal{L}$ un sous-espace vectoriel *quelconque* de l'espace $L(E, F)$ satisfaisant aux conditions suivantes:

(1) Quel que soit $w \in \mathcal{L}(F, F)$, les applications composées $w \circ u$ de w et $u \in \mathcal{L}$ appartiennent à $\mathcal{L}$;

(2) Quel que soit $x \neq 0$ dans E, il existe $u \in \mathcal{L}$ tel que $u(x) \neq 0$.

Or, dans l'espace $L(E, F)$ muni de la topologie de la convergence simple, $\mathcal{L}$ est partout dense, et par suite en munissant $\mathcal{L}$ de la topologie de la convergence simple, le dual $\mathcal{L}'$ de $\mathcal{L}$ est identique à celui de $L(E, F)$. Nous appellons la topologie $\sigma(\mathcal{L}, \mathcal{L}')$[3] la *topologie faible* sur $\mathcal{L}$, ainsi par exemple, dire qu'une partie M de $\mathcal{L}$ est faiblement compacte dans $\mathcal{L}$ signifie que M est compacte pour la topologie $\sigma(\mathcal{L}, \mathcal{L}')$. Une partie M de l'espace $L(E, F)$ est dite *F-disquée* ou un *F-disque*, si avec deux applications linéaires u et v, M contient aussi toutes les applications linéaires $w_1 \circ u + w_2 \circ v$, où w_1 et w_2 sont deux endomorphismes continues de F tels que $\|w_1\| + \|w_2\| \leqq 1$. Soit M une partie de $\mathcal{L}$; l'ensemble $\dot{M}$ des $u \in \mathcal{L}$ tels que $u(x) \in M(x)$ pour tout $x \in E$ s'appelle l'*adhérence algébrique* de M dans $\mathcal{L}$; si $M = M$, on dit que M est *algébriquement fermé* dans $\mathcal{L}$. Pour abréger des langages, nous dirons qu'une topologie sur E est *compatible avec* $\mathcal{L}$ si elle est localement convexe séparée et que l'espace $\mathcal{L}(E, F)$ est identique à $\mathcal{L}$ lorsqu'on munit E de cette topologie.

THÉORÈME 1. *Soient E un espace vectoriel, F un espace normé, $\mathcal{L}$ un sous-espace vectoriel de $L(E, F)$ satisfaisant aux conditions (1) et*

1) S. Kasahara: Le problème de la dualité en une forme générale dans la théorie des espaces localement convexes, à paraître dans Math. Japonicae.

2) Tout espace vectoriel envisagé dans cette note est celui sur la droite numérique.

3) Pour cette notation voir N. Bourbaki: Espaces vectoriels topologiques, Chap. IV, Hermann, Paris (1955).