28. Über die rekursive Einführung der Funktionen in der reinen Zahlentheorie

Von Shôji MAEHARA

(Comm. by Z. SUETUNA, M.J.A., March 12, 1957)

Beim Gentzenschen Widerspruchsfreiheitsbeweise für die reine Zahlentheorie,[1] setzt er von den Funktionen (und Prädikaten) voraus, dass sie *entscheidbar definiert* sind, und von den zahlentheoretischen Axiomen, dass sie *im Sinne der finiten Auffassung der Aussagenverknüpfungszeichen* richtig sind. In der Tat ist die von beliebigen entscheidbar definierten Funktionen durch eine rekursive Definition eingeführte Funktion auch entscheidbar definiert. Aber eine durch das ι-Zeichen dargestellte Funktion ist nicht immer entscheidbar definiert, also so ist eine von solchen Funktionen rekursiv definierte Funktion sicherlich auch nicht entscheidbar definiert. Es gilt ja sogar im allgemeinen nicht, dass das neue Axiom (d.h. „implizite Definition") für diese rekursive Funktion im Sinne der finiten Einstellung richtig ist.

Das Ziel der vorliegenden Bemerkung ist, die Widerspruchsfreiheit der rekursiven Definition der Funktion in der reinen Zahlentheorie nachzuweisen.

Im folgenden wollen wir die reine Zahlentheorie mit dem zahlentheoretischen Formalismus (Abk.: z.F.) darstellen, die aus dem engeren Prädikatenkalkül durch die Hinzufügung der mathematischen Axiome für die natürlichen Zahlen und des Schemas für die vollständige Induktion entsteht.

Hauptergebnis. Wenn die Formeln

$$(1)\qquad V\mathfrak{x}_1\cdots V\mathfrak{x}_\nu \exists\mathfrak{y}[\mathfrak{A}(\mathfrak{y},\mathfrak{x}_1,\cdots,\mathfrak{x}_\nu)\ \&\ V\mathfrak{z}(\mathfrak{A}(\mathfrak{z},\mathfrak{x}_1,\cdots,\mathfrak{x}_\nu)\supset\mathfrak{z}=\mathfrak{y})]$$

und

$$(2)\qquad V\mathfrak{x}_1\cdots V\mathfrak{x}_\nu V\mathfrak{x}V\mathfrak{u}\exists\mathfrak{y}[\mathfrak{B}(\mathfrak{y},\mathfrak{x},\mathfrak{u},\mathfrak{x}_1,\cdots,\mathfrak{x}_\nu)\ \&\ V\mathfrak{z}(\mathfrak{B}(\mathfrak{z},\mathfrak{x},\mathfrak{u},\mathfrak{x}_1,\cdots,\mathfrak{x}_\nu)\supset\mathfrak{z}=\mathfrak{y})]$$

z.F.-beweisbar sind, worin keine freie Zahlenvariable vorkommt, so ist dasjenige System widerspruchsfrei, das aus z.F. durch die Hinzufügung der neuen Axiome

$$(3)\qquad V\mathfrak{x}_1\cdots V\mathfrak{x}_\nu V\mathfrak{y}(\mathfrak{A}(\mathfrak{y},\mathfrak{x}_1,\cdots,\mathfrak{x}_\nu)\supset F(\mathfrak{y},1,\mathfrak{x}_1,\cdots,\mathfrak{x}_\nu)),$$

$$(4)\qquad V\mathfrak{x}_1\cdots V\mathfrak{x}_\nu V\mathfrak{x}V\mathfrak{u}V\mathfrak{y}[(F(\mathfrak{u},\mathfrak{x},\mathfrak{x}_1,\cdots,\mathfrak{x}_\nu)\ \&\ \mathfrak{B}(\mathfrak{y},\mathfrak{x},\mathfrak{u},\mathfrak{x}_1,\cdots,\mathfrak{x}_\nu))\supset F(\mathfrak{y},\mathfrak{x}+1,\mathfrak{x}_1,\cdots,\mathfrak{x}_\nu)]$$

und

$$(5)\qquad V\mathfrak{x}_1\cdots V\mathfrak{x}_\nu V\mathfrak{x}V\mathfrak{y}V\mathfrak{z}[(F(\mathfrak{y},\mathfrak{x},\mathfrak{x}_1,\cdots,\mathfrak{x}_\nu)\ \&\ F(\mathfrak{z},\mathfrak{x},\mathfrak{x}_1,\cdots,\mathfrak{x}_\nu))\supset\mathfrak{y}=\mathfrak{z}]$$

1) Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie, Math. Ann., **112**, 493–565 (1936).