68. L'Intégrale de Denjoy et l'Intégration au Moyen des Espaces Rangés. III

Par Shizu NAKANISHI

Université d'Osaka

(Comm. by K. KUNUGI, M.J.A., May 15, 1957)

D'après le Théorème 3 et le Théorème 4 montrés dans la Note "L'intégrale de Denjoy et l'intégration au moyen des espaces rangés. I", nous voyons aussitôt que: 1) Si $f(x)$ est une fonction intégrable au sens de Denjoy, il existe au moins une collection maximale f^* qui contient au moins une suite fondamentale jouissant de la propriété P' et telle que $J[f^*]=f(x)$.[1] Réciproquement, 2) si f^* est une collection maximale qui contient au moins une suite fondamentale jouissant de la propriété P', la fonction $J[f^*]$ est intégrable au sens de Denjoy et on a $I[f^*]=(D)\int_a^b J[f^*]dx$. Le but de cette Note est de montrer qu'on a de plus que: Considérons la famille $G(P')$[2] des collections maximales dans l'ensemble $U(P')$ des suites fondamentales jouissant de la propriété P', alors il existe une correspondance biunivoque entre les collections maximales $f^*(P')$ de $G(P')$ et les fonctions intégrables au sens de Denjoy, et on a $I[f^*(P')]=(D)\int_a^b J[f^*(P')]dx$.

Commençons d'abord par le

Lemme 6. *Soient* $u=\{V(F_n, \mu_n; f_n)\}$ *et* $v=\{V(H_n, \nu_n; g_n)\}$ *deux suites fondamentales qui jouissent de la propriété* P' *telles qu'on ait* $J[u]=J[v]$. *Alors, il y a une suite fondamentale* $u^*=\{V(F_n^*, \nu_n^*; f_n^*)\}$ *qui jouit de la propriété* P' *et telle qu'on ait à la fois* $u^*\leq u$ *et* $u^*\leq v$.

Démonstration. On peut supposer que les suites u et v jouissent des propriétés suivantes: On a, pour tout $n=0, 1, 2, \cdots$,

(1) $\mu_n<\nu_n$,

(2) $\nu_{2n+1}+6<\mu_{2(n+1)}$,

(3) $\operatorname{mes}(CF_{2(n+1)})<2^{-(\mu_{2n+1}+\alpha+5)}$ et $\operatorname{mes}(CH_{2(n+1)})<2^{-(\nu_{2n+1}+\alpha+5)}$, où α est un nombre naturel tel que $2^\alpha\geq\max\{\max_x f_0(x), \max_x g_0(x)\}$,

(4) $\displaystyle\sum_{j=0}^{n}\int_{CF_{2(n+1)}}|f_{2j}(x)|\,dx<2^{-(\nu_{2n+1}+3)}$,

(5) $\displaystyle\int_{CH_{2(n+1)}}|g_{2n}(x)|\,dx<2^{-(\nu_{2n+1}+3)}$,

1) Voir K. Kunugi: Sur les espaces complets et régulièrement complets. II, Proc. Japan Acad., **30**, 912–916 (1954). Dans cette Note, convenons d'identifier deux fonctions qui ne sont différentes que sur un ensemble de mesure nulle.

2) La définition sera donnée plus bas.