94. Über Kummersche Erweiterungen

Von Mitsuya MORI

(Comm. by Z. SUETUNA, M.J.A., July 12, 1957)

In der vorliegenden Arbeit wollen wir Kummersche Erweiterungen über einem Körper durch Untergruppen der Gruppe der Charaktere, welche nur von der Multiplikationsgruppe des Grundkörpers abhängt, beschreiben [1–2].[1] Im § 1 untersuchen wir die Struktur dieser Untergruppen. Im § 2 betrachten wir Normenrestsymbol für Charaktere. Im letzten § 3 kommen wir zum klassischen Fall zurück und untersuchen die Beziehung zwischen dem Normenrestsymbol für Charaktere und dem für Primideale.

§ 1. **Die Gruppe der Charaktere.** Es sei k ein Körper mit Charakteristik p_0, welcher die n-ten Einheitswurzeln enthält. Wenn $p_0 \neq 0$ ist, sei $n \not\equiv 0 \pmod{p_0}$. Mit k^* wird die Multiplikationsgruppe von k, und mit k^{*n} die Gruppe der n-ten Potenzen aller Elemente aus k^* bezeichnet. Nun sei K ein abelscher Körper vom Exponenten n über k. Dann gibt es eine k^{*n} enthaltendene Untergruppe H von k^*, derart, daß $(H:k^{*n})=[K:k]$ ist, und K durch Adjungierung der n-ten Wurzeln aller Elemente aus H entsteht. Z sei die additive Gruppe aller ganzen Zahlen, Q die additive Gruppe aller Brüchen, deren Nenner die Teiler von n sind, und Q' die Faktorgruppe Q/Z von Q nach Z. Wir bezeichnen mit E das Tensorprodukt $k^* \otimes Q'$ von k^* und Q' über Z, wobei k^* als multiplikative Gruppe aufgefaßt wird. Ist F das Bild des Tensorproduktes $H \otimes Q'$ über Z, auf das $H \otimes Q'$ durch die natürliche Zuordnung $H \otimes Q' \to k^* \otimes Q'$ übergeht, dann ist F ein endlicher Untermodul von E, und isomorph zu der galoissche Gruppe $G(K/k)$ von K nach k, wobei $G(K/k)$ natürlich als multiplikative Gruppe aufgefaßt wird. Es sei $E^{\wedge}$[2] die kompakte Gruppe der Charaktere von der diskreten Gruppe E, Ψ der Annihilator $(E^{\wedge}, F)$ des Moduls F in $E^{\wedge}$. Dann ist $E^{\wedge}/\Psi \cong F$. Wir bezeichnen mit A_k das Kompositum aller Kummerschen Körper vom Exponenten n über k, mit $G(A_k/k)$ die kompakte galoissche Gruppe von A_k/k. Es sei η ein kontinuierlicher Charakter von $G(A_k/k)$. Dann gibt es ein Element A aus A_k^* derart, daß $\eta(S)=A^{S-1}$ für jedes S aus $G(A_k/k)$ ist, und zwar so, daß A^n zu k^* gehört. Umgekehrt sei a ein Element aus k^*. Dann definiert

1) Y. Kawada hat in seiner Arbeit [2] als Beispiel von Klassenformation Kummersche Erweiterungen über demjenigen Körper, dessen Multiplikationsgruppe Normgruppe jeder endlichen galoisschen Erweiterung wird, betrachtet. Dabei hat er eine solche Gruppe der Charaktere eingeführt, um daraus Klassformation zu konstruieren.

2) Im folgenden bedeutet ^ die kompakte (diskrete) Gruppe der kontinuierlichen Charaktere einer diskreten (kompakten) Gruppe.