24. *Sur le Problème de Neumann pour l'Équation* $\Delta u(P)=F(P, u(P), \partial u(P))$

Par Tokui SATŌ
Institut de Mathématiques, Université de Kobe
(Comm. by Z. SUETUNA, M.J.A., Feb. 12, 1958)

Récemment MM. Johannes et Joachin Nitsche[1] ont obtenu des résultats intéressents relatifs au probèlme de Neumann pour l'équation

$$\partial_x\partial_x u+\partial_y\partial_y u=(\partial_x u)^2+(\partial_y u)^2.$$

On peut étendre leurs résultats à un cas plus général. Par exemple, considérons l'équation

$$\Delta u(P)=F(P, u(P), \partial u(P)) \tag{1}$$

et cherchons la solution qui satisfait à la condition

$$\frac{du(P)}{dn}=f(P) \tag{2}$$

sur la frontière, où Δ est le laplacien:

$$\Delta u=\partial_1\partial_1 u+\partial_2\partial_2 u+\partial_3\partial_3 u$$

et $\dfrac{du(P)}{dn}$ est la dérivée prise suivant la normale intérieure.

Soient T un domaine appartenant à B_h et S sa frontière dans l'espace des variables x_1, x_2, x_3. Soient $f(x_1, x_2, x_3)$ une fonction continue sur S et $F(x_1, x_2, x_3, u, p_1, p_2, p_3)$ une fonction continue et majorée en module par une constante M dans le domaine

$$(x_1, x_2, x_3)\in S\cup T, \quad -\infty<u, p_1, p_2, p_3<+\infty.$$

Supposons d'abord qu'une solution de l'équation (1) continue dans $S\cup T$ satisfait à la condition (2), les dérivées partielles du premier et du deuxième ordres étant continues respectivement dans $S\cup T$ et dans T. Si S' est la frontière d'un domaine T' dans T, la formule de Green[2] donne

$$\int_{S'}\frac{du(Q)}{dn}d\sigma_Q=-\int_{T'}F(Q, u(Q), \partial u(Q))d\omega_Q, \tag{3}$$

où $d\sigma$ est l'élément d'aire de S et $d\omega$ celui de volume de T. La fonction $1/r_{PQ}$, où r_{PQ} est la distance du point variable Q à un point fixe P, est harmonique dans l'espace entier sauf au point P. En désignant par $T(\delta)$ le domaine limité par S et par une sphère $S(\delta)$ de centre P et de rayon δ assez petit, on obtient

---

1) Johannes und Joachin Nitsche: Bemerkungen zum zweiten Randwertproblem der Differentialgleichung $\Delta\varphi=\varphi_x^2+\varphi_y^2$, Math. Ann., **126** (1953).

2) R. Courant und D. Hilbert: Methoden der mathematischen Physik, **2**, 231 (1937).