22. L'Intégrale de Denjoy et l'Intégration au Moyen des Espaces Rangés. IV

Par Shizu NAKANISHI
Faculté des Sciences, Université d'Osaka

(Comm. by K. KUNUGI, M.J.A., Feb. 12, 1958)

Nous avons considéré dans les Notes I, II et III précédentes[1] que nous pouvons appliquer la notion des espaces rangés à définir l'intégrale au sens de Denjoy. Dans cette Note, nous allons donner une autre définition de l'intégrale au sens de Denjoy, en utilisant la méthode des espaces rangés.

Soit X l'ensemble des couples (f, F) telles que:

i) $f(x)$ est une fonction intégrable au sens de Lebesgue définie dans l'intervalle $[a, b]$.

ii) F est un ensemble fermé contenu dans $[a, b]$.

iii) $f(x)$ s'annule pour tout x n'appartenant pas à F.

Nous ferons les conventions suivantes:

1. $(f, F)=(f_1, F_1)$ signifiera $f=f_1$ et $F=F_1$.
2. $(f_1, F_1)\pm(f_2, F_2)=(f_1\pm f_2, F_1\cup F_2)$.
3. $c(f, F)=(cf, F)$, c est un nombre réel.

Tout d'abord, nous allons introduire dans l'espace X une topologie et un rang. Étant donnés un entier positif ou nul ν et une fonction (f, F) quelconque de X, définissons le voisinage $V(\nu, (f, F))$ de la fonction (f, F) comme suit: Le voisinage $V(\nu, (f, F))$ est la totalité des fonctions (f_1, F_1) de X qui jouissent de la propriété suivante: (f_1, F_1) est une somme de la fonction (f, F) et une fonction (f^*, F^*) de X (nous désignerons par $(f^*, F^*; F')$ plus précisément), c.-à-d.

$$(f_1, F_1)=(f, F)+(f^*, F^*; F'),$$

qui satisfait aux condition suivantes:

1°) F^* et F' sont des ensembles fermés tels que $F^*\supseteq F'\supseteq F$.

2°) $f^*(x)$ s'annule pour tout x appartenant à F'.

3°) Pour tout système élémentaire[2] d'intervalles I_i $(i=1, 2, \cdots, i_0)$ tel que $I_i\cap F'$ n'est pas vide pour tout i, on a

$$\sum_{i=1}^{i_0}\left|\int_{I_i} f^*(x)\,dx\right|<2^{-\nu}.$$

Alors, on voit aussitôt que les voisinages ainsi définis satisfont aux conditions (A) et (B) de F. Hausdorff.[3] Pour la profondeur $\omega(X)$ de

1) S. Nakanishi: L'intégrale de Denjoy et l'intégration au moyen des espaces rangés. I-III, Proc. Japan Acad., **32**, 678-683 (1956); **33**, 13-18, 265-270 (1957).

2) On dit qu'un système d'intervalles est élémentaire, lorsqu'il est composé d'un nombre fini d'intervalles n'empiétant pas les uns sur les autres.

3) Voir F. Hausdorff: Grundzüge d. Mengenlehre, p. 213.