47. *Sur la Dérivation de l'Intégrale* (E. R.) *Indéfinie. I*

Par Shizu NAKANISHI
Faculté des Sciences, Université d'Osaka

(Comm. by K. KUNUGI, M.J.A., April 12, 1958)

En utilisant la méthode des espaces rangés, Prof. K. Kunugi a élargi la notion de l'intégrale dans la Note "Application de la méthode des espaces rangés à la theorie de l'intégration. I".[1] Le but de ces Notes est d'examiner la dérivation de cette intégrale nouvelle (nous la désignerons par intégrale (*E. R.*)).

Dans ces Notes, nous nous conformons, en général, à la notation et à la terminologie de la Note de Prof. K. Kunugi.

Soit $u=\{u_n\}$, $u=V(F_n, \nu_n; f_n)$, une suite fondamentale. Puisqu'alors $f_{n+1}(x)$ est une fonction de $V(F_n, \nu_n; f_n)$, on peut poser, pour tout n $(n=0, 1, 2, \cdots)$,

$$f_{n+1}(x)=f_n(x)+p_n(x)+r_n(x),$$

où $p_n(x)$, $r_n(x)$ sont des fonctions en escalier satisfaisant aux conditions [1], [2] et [3].[2] Posons $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$.[3] Désormais, nous désignerons l'intégrale (*E. R.*) de $f(x)$, c.-à-d. $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx$ par (*E. R.*) $\int_a^b f(x)\,dx$.

On a toujours mes$(F'-F'')=0$ pour deux voisinages $V(F', \nu'; f')$ et $V(F'', \nu''; f'')$ tels que $V(F', \nu'; f')\subseteq V(F'', \nu''; f'')$. Donc, pour la suite fondamentale $\{V(F_n, \nu_n; f_n)\}$ quelconque, si l'on pose

$$F_m^*=\bigcap_{n=m}^{\infty} F_n,$$

$\{F_m^*\}$ est une suite non-décroissante, de presque total $[a,b]$, des ensembles fermés telle que $F_m^*\subseteq F_m$ et mes $F_m^*=$ mes F_m.

Cela posé, commençons par montrer deux théorèmes suivants.

Théorème 1. *Soit* $u=\{u_n\}$, $u_n=V(F_n, \nu_n; f_n)$, *une suite fondamentale. Posons* $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. *Alors, on a presque partout*

$$f(x)=f_0(x)+h(x)+g(x),$$

où $h(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} p_n(x)$ *et* $g(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} r_n(x)$.

En effet, on a d'abord, par induction, pour tout entier positif m,

---

1) K. Kunugi: Application de la méthode des espaces rangés à la théorie de l'intégration. I, Proc. Japan Acad., **32**, 215–220 (1956).

2) Elles désignent les conditions [1], [2] et [3] qui sont données dans la Note de K. Kunugi: Loc. cit., c.-à-d. [1] $r(x)$ s'annule pour tout x appartenant à F. [2] On a $\int_a^b |p(x)|\,dx<2^{-\nu}$. [3] On a $\left|\int_a^b r(x)dx\right|<2^{-\nu}$.

3) Dans ces Notes, nous identifions, en général, deux fonctions qui ne sont différentes que sur un ensemble de mesure nulle.