61. *Sur la Dérivation de l'Intégrale (E. R.) Indéfinie. II*

Par Shizu NAKANISHI
Institut des Mathématiques, Université d'Osaka
(Comm. by K. KUNUGI, M.J.A., May 13, 1958)

Continuons l'étude sur la dérivation de l'intégrale ($E.$ $R.$) indéfinie.[1]

Théorème 8. *Soit* $u=\{u_n\}$, $u_n=V(F_n, \nu_n; f_n)$, *une suite fondamentale satisfaisant aux conditions* $[3_1]$ *et* $[3_2]$. *Posons* $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. *Alors, l'intégrale (E. R.) indéfinie* $F(x)$ *de* $f(x)$ *est une fonction absolument continue au sens large*[2] *sur tout* F_n^*, *où* $F_n^*=\bigcap\limits_{m=n}^{\infty} F_m$, $(n=0, 1, 2,\cdots)$.

En effet, puisqu'on a

$$F(x)=\int_a^x f_0(x)\,dx+\int_a^x h(x)\,dx+\sum_{n=0}^{\infty}\int_a^x r_n(x)\,dx,$$

où $h(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} p_n(x)$, il suffit de montrer que la fonction $G(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\int_a^x r_n(x)\,dx$ est absolument continue au sens large sur tout F_m^*. Soient ε un nombre positif quelconque et n_0 une entier positif tel que $\sum\limits_{i=n_0+1}^{\infty} 2^{-\nu_i}<\varepsilon/2$ et $n_0>m$. Alors, l'intégrale de la fonction $\sum\limits_{i=0}^{n_0}|r_i(x)|$ étant absolument continue sur $[a, b]$, il existe un nombre positif $\delta=\delta(\varepsilon)$ tel que

$$\text{mes}\, E<\delta \quad \text{entraîne} \quad \int_E\Big(\sum_{i=0}^{n_0}|r_i(x)|\Big)dx<\frac{\varepsilon}{2},$$

quel que soit l'ensemble E contenu dans $[a, b]$.

Soit $[a_j, b_j]$ $(j=1, 2,\cdots, j_0)$ un système élémentaire quelconque tel que les extrémités appartiennent à F_m^* et dont la mesure $\sum\limits_{j=1}^{j_0}(b_j-a_j)$ est inférieur à δ. Puisqu'alors les extrémités des intervalles $[a_j, b_j]$ appartiennent à F_i pour tout $i\geq n_0+1$, on a, d'après la condition $[3_2]$, pour tout $i\geq n_0+1$

$$\sum_{j=1}^{j_0}\left|\int_{a_j}^{b_j} r_i(x)\,dx\right|<2^{-\nu_i}.$$

Donc, on a

$$\sum_{j=1}^{j_0}|G(b_j)-G(a_j)|\leq\sum_{j=1}^{j_0}\int_{a_j}^{b_j}\Big(\sum_{i=0}^{n_0}|r_i(x)|\Big)dx+\sum_{j=1}^{j_0}\sum_{i=n_0+1}^{\infty}\left|\int_{a_j}^{b_j} r_i(x)\,dx\right|$$
$$<\frac{\varepsilon}{2}+\sum_{i=n_0+1}^{\infty}2^{-\nu_i}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

---

1) S. Nakanishi: Sur la dérivation de l'intégrale ($E.$ $R.$) indéfinie. I, Proc. Japan Acad., **34**, 199-204 (1958).

2) Pour la définition, voir, par exemple, S. Saks: Theory of the Integral, 223 (1937).