99. Sur les Topologies Compatibles avec la Structure d'une Algèbre

Par Shouro KASAHARA
Université de Kobe

(Comm. by K. KUNUGI, M.J.A., July 12, 1958)

Un ensemble E muni d'une structure d'algèbre[1] et d'une topologie compatible avec la structure d'espace vectoriel[2] de E est appelé *algèbre topologique* si les applications $x \to xa$, $x \to ax$ de E dans E sont continues pour tout $a \in E$. Soit E une algèbre munie d'une topologie compatible avec sa structure d'espace vectoriel. On dit qu'une partie A de E est *hyperbornée à gauche* (resp. *hyperbornée à droite*) si pour tout voisinage U de 0 dans E, il existe un voisinage V de 0 dans E tel que l'on ait $VA \subseteq U$ (resp. $AV \subseteq U$). Une partie de E qui est à la fois hyperbornée à gauche et hyperbornée à droite est appelée *hyperbornée.*

Soit E une algèbre mise en dualité avec un espace vectoriel E'; nous traitons, dans cette note, le problème de la compatibilité avec la structure d'algèbre de E des topologies compatibles avec la dualité entre E et E', et de la compatibilité avec la dualité des topologies à gauche et topologies à droite.

Signalons d'abord le

LEMME 1. *Si E est une algèbre topologique localement convexe séparée, E est aussi une algèbre topologique pour la topologie faible $\sigma(E, E')$, où E' est le dual de E.*

La démonstration résulte immédiatement de la Proposition 6 de [2, p. 103]. De plus, en vertu de la Proposition 7 de [2, p. 104], on obtient le

LEMME 2. *Soient E une algèbre et à la fois espace*[3] *localement convexe séparé, E' son dual. Si la topologie de E est identique à la topologie de Mackey $\tau(E, E')$, pour que E soit une algèbre topologique il faut et il suffit que l'algèbre E munie de la topologie faible $\sigma(E, E')$ soit une algèbre topologique.*

COROLLAIRE. *Soit E une algèbre mise en dualité avec un espace vectoriel E'. Pour que l'algèbre E munie de la topologie faible $\sigma(E, E')$ soit une algèbre topologique il faut et il suffit que E soit une algèbre topologique pour la topologie de Mackey $\tau(E, E')$.*

En conséquence, on peut conclure:

---

1) Dans cette note, toutes les algèbres et tous les espaces vectoriels considérés ont pour corps des scalaires K le corps des nombres complexes. Tous les résultats sont valables aussi bien lorsque K est le corps des nombres réels.

2) De façon générale, nous suivons la terminologie de N. Bourbaki [1] et [2].

3) Espace vectoriel.