109. *Erweiterung des Erlanger Programms durch Transformationsgruppenerweiterungen*

Von Tsurusaburo TAKASU

(Comm. by Z. SUETUNA, M.J.A., Oct. 13, 1958)

Die Gruppenparameter sind bis heute ausschliesslich so-genannte variable Konstanten gewesen, so dass die Geometrien des Erlanger Programms (1872) von Felix Klein ausschliesslich gegenüber solchen Transformationsgruppen aufgefasst sind, wenn die Transformationen durch Koordinaten ausgedrückt sind. Die Tangentialräume für die Übertragungsgeometrien sind auch gegenüber solchen Transformationsgruppen aufgefasst. Die Hauptfaserräumen der Hauptfaserbündeln sowie die Gruppenmannigfaltigkeiten der "géométrie de groupes" im Sinne von É. Cartan [1] sind gleichfalls solche Gruppenmannigfaltigkeiten.

Ich habe (T. Takasu [8]) jedoch bemerkt, dass es unendlich viele Transformationsgruppen gibt, bei welchen die Gruppenparameter Funktionen von Koordinaten sind. Im folgenden möchte ich zeigen, dass *das Erlanger Programm F. Kleins durch Erweiterungen der klassischen Transformationsgruppen durch entsprechende Transformationsgruppen, bei denen die Gruppenparameter Funktionen von Koordinaten sind, sich erweitern lässt.*

1. Beispiele von Transformationsgruppen, bei denen die Gruppenparameter Funktionen von Koordinaten sind. Vor allem möchte ich einige konkrete, naheliegende Beispiele genannter Art zeigen.

(i) Polarkoordinaten in der Ebene

$$x=\rho\cos\theta,\quad y=\rho\sin\theta,\quad ds^2=dx^2+dy^2=d\rho^2+\rho^2 d\theta^2.$$

Wir setzen: $d\xi=d\rho,\ d\eta=\rho d\theta$, so dass $\xi=\rho,\ \eta=\rho\theta$;

$$dx=d\rho\cos\theta-\rho\sin\theta d\theta=d\xi\cos\theta-d\eta\sin\theta,\quad dy=d\rho\sin\theta+\rho\cos\theta d\theta=d\xi\sin\theta+d\eta\cos\theta,\quad (\theta=\eta/\xi).$$

$$d\xi=dx\cos\theta+dy\sin\theta,\quad d\eta=-dx\sin\theta+dy\cos\theta,\quad (\theta=\tan^{-1}(y/x)).$$

Also erhält man *die Transformationsformeln gewünschter Art*:

$$\xi=x\cos\theta+y\sin\theta+\xi_0,\quad \eta=-x\sin\theta+y\cos\theta+\eta_0,\quad (\theta=\tan^{-1}(y/x)),$$

wo $\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ eine Orthogonalmatrix ist, und

$$\xi_0=-\int x(-\sin\theta)d\theta-\int y\cos\theta d\theta=-\int\rho(-\sin\theta\cos\theta+\sin\theta\cos\theta)\,d\theta=-\int\theta\cdot d\theta=\text{konst.},$$

$$\eta_0=\int x\cos\theta d\theta+\int y\sin\theta\, d\theta=\int\left(\int d\xi\right)d\theta=\int\theta\cdot d\theta=\text{konst.}$$

Für $-\infty<\xi<+\infty,\ -\infty<\eta<+\infty$, muss man das Gebiet für (ξ,η) so auffassen, dass das, wegen $(-\infty<\theta<+\infty)$, als eine platt auf der xy-Ebene erdrückte Schraubenfläche aussieht.

Jeder von den Radiusvektoren $\cdots O_{-1}(0,\theta-2\pi)P_{-1}(\rho,\theta-2\pi),\ O_0(0,\theta)P_0(\rho,\theta),$ $O_1(0,\theta+2\pi)P_1(\rho,\theta+2\pi),\ O_2(0,\theta+4\pi)P_2(\rho,\theta+4\pi),\cdots$ liegt genau auf dem nächstfolgenden ohne ihn zu treffen im endlichen.