129. L'Intégrale (E. R.) et la Théorie des Distributions

Par Shizu NAKANISHI

(Comm. by K. KUNUGI, M.J.A., Nov. 12, 1958)

Dans cette Note, nous montrerons trois propositions suivantes:

Proposition 1. *Si $f(x)$ est une fonction intégrable $(E.\ R.)$*[1] *définie comme une fonction-limite d'une suite fondamentale satisfaisant à la condition $[3_1]$*[2] *dans un intervalle $[a, b]$, et si $g(x)$ est une fonction à variation bornée dans $[a, b]$, $f(x)g(x)$ est également une fonction intégrable $(E.\ R.)$ définie comme une fonction-limite d'une suite fondamentale satisfaisant à la condition $[3_1]$, et on a, en désignant par $F(x)$ une intégrale $(E.\ R.)$ indéfinie de $f(x)$,*

$$(E.\ R.)\int_a^b f(x)g(x)\,dx=F(b)g(b)-(S)\int_a^b F(x)dg(x).$$[3]

Proposition 2. *Si $f(x)$, $-\infty<x<+\infty$, est une fonction localement intégrable $(E.\ R.)$ définie comme une fonction-limite d'une suite fondamentale satisfaisant à la condition $[3_1]$,*[4] *la fonction*

$$f(\varphi)=(E.\ R.)\int f(x)\varphi(x)\,dx, \qquad \varphi\in(\mathcal{D}),$$

est une distribution d'ordre≤ 1.

Proposition 3. *Si $T(\varphi)$ est une distribution réelle définie dans l'espace euclidien de dimension 1, quel que soit l'intervalle I_0, il existe une suite fondamentale $u=\{V(F_n, \nu_n; g_n)\}$ telle que*

$$\lim_{n\to\infty}\int f_n(x)\varphi(x)\,dx=T(\varphi) \qquad \textit{pour toute } \varphi\in(\mathcal{D}_{I_0}).$$

Lemme 1. *Soit $u=\{V(F_n, \nu_n; f_n)\}$ une suite fondamentale qui satisfait à la condition $[3_1]$. Alors, pour toute fonction $g(x)$ monotone non décroissante et bornée, $|g(x)|<2^\alpha$ (α un entier positif), il existe une*

---

1) Une fonction $f(x)$ est dit intégrable $(E.\ R.)$ si $f(x)$ est définie comme une fonction-limite d'une suite fondamentale $\{V(F_n, \nu_n; f_n)\}$ jouissant de la propriété P^*. Nous désignerons l'intégrale $(E.\ R.)$ d'une telle fonction $f(x)$, c.-à-d. $\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx$ par $(E.\ R.)\int_a^b f(x)dx$. Voir K. Kunugi: Application de la méthode des espaces rangés à la théorie de l'intégration. I, Proc. Japan Acad., **32**, 215–220 (1956).

2) $[3_1]$: Pour tout intervalle $[c, d]$ contenu dans $[a, b]$, on a $\left|\int r(x)dx\right|<2^{-\nu}$; voir S. Nakanishi: Sur la dérivation de l'intégrale $(E.\ R.)$ indéfinie. I, Proc. Japan Acad., **34**, 199–204 (1958).

3) M. H. Okano a donné cette formule à l'autre condition dans la Note: Multiplication of $(E.\ R.)$-integrable functions, Proc. Japan Acad., **34**, 585–586 (1958).

4) C.-à-d. il existe, pour tout x, $-\infty<x<+\infty$, un intervalle I qui contient x et sur lequel $f(x)$ est définie comme une fonction-limite d'une suite fondamentale satisfaisant à la condition $[3_1]$ et jouissant de la propriété P^*.