158. Unicité du Prolongement des Solutions des Équations Elliptiques du Quatrième Ordre

Par Sigeru MIZOHATA

Université de Kyôto

(Comm. by K. KUNUGI, M.J.A., Dec. 12, 1958)

1. *Introduction.* Le problème de l'unicité du prolongement des solutions pour les équations elliptiques quelconques est, dans ma connaissance, resté ouvert (voir à ce sujet, les références à la fin du texte). Cette Note a pour but de démontrer cette propriété pour tout opérateur différentiel elliptique du quatrième ordre. Notre méthode n'est qu'une variante de celle de Calderón, mais le résultat est nouveau.

2. On va partir d'une variante du Lemme 1 de [2]:

Lemme 2,1. *Soit $u(t)$, $0\leq t\leq h$, une fonction continuement différentiable en t à valeurs dans L^2 telle que $\Lambda u(t)$ soit continue. On suppose que $u(t)$ s'annule à $t=0$, mais ne s'annule identiquement dans aucun voisinage de $t=0$. Soient $P(t)$ et $Q(t)$ deux opérateurs d'intégrale singulière tels que les symboles $\sigma(P)=F_1(x,t,z)$, $\sigma(Q)=F_2(x,t,z)$ soient (à valeurs réelles) dans C^∞_β, $\beta>1$, pour $|z|\geq 1$. On suppose que $P(t)^{-1}$ existe pour $0\leq t\leq h$. On a alors*

(A)

$$J_n=\int_0^h \varphi_n^2\left\|\frac{d}{dt}u+(P+iQ)\Lambda u\right\|^2 dt\geq(\rho-1)^2I^2+\frac{I^2}{n}-o\Big(\frac{I^2}{n}\Big)-o\Big(\frac{\rho I^2}{n}\Big).$$

Preuve. Nous nous limitons à expliciter les modifications à faire. D'abord, dans l'analyse de Calderón, le terme

$$\|(\varphi u)'+iQ\Lambda\varphi u\|^2$$

n'a joué aucun rôle. Ici on va lui faire jouer un rôle important. Dans le Lemme 2,2, on utilisera l'inégalité

$$\int_0^h \|(\varphi u)'+iQ\Lambda\varphi u\|^2 dt\geq\frac{1}{2}\int_0^h\|(\varphi u)'\|^2dt-\int_0^h\varphi^2\|Q\Lambda u\|^2dt. \tag{2,1}$$

Mais, dans ce Lemme cette inégalité est trop grossière. On fait comme suit:

$$\begin{aligned}&[(\varphi u)', P\Lambda\varphi u]+[P\Lambda\varphi u, (\varphi u)']\\ &\quad=[\varphi u, P\Lambda\varphi u]'-[\varphi u, P\Lambda(\varphi u)']-[\varphi u, P_t'\Lambda\varphi u]+[P\Lambda\varphi u, (\varphi u)']\\ &\quad=[\varphi u, P\Lambda\varphi u]'+[(P\Lambda-\Lambda P^*)\varphi u, (\varphi u)']-[\varphi u, P_t'\Lambda\varphi u].\end{aligned}$$

Notons $\varphi^2(h)=O(I^2/n^2)$, et $\int_0^h\varphi_n^2\|u\|^2dt=o(I^2/n^2)$ par suite

$$\int_0^h\varphi^2\|\Lambda u\|\,\|u\|dt=o(\rho I^2/n).$$

D'abord, $$\int_0^h[\varphi u, P_t'\Lambda\varphi u]dt=o(\rho I^2/n),$$