157. *Sur l'Inégalité d'Energie pour l'Equation Différentielle p-Parabolique*

Par Takeshi KOTAKE

Université de Kyôto

(Comm. by K. KUNUGI, M.J.A., Dec. 12, 1958)

1. Introduction. A propos de l'équation p-parabolique, M. S. Mizohata [7] a réussi à résoudre le problème de Cauchy du point de vue de M. J. Leray [5], en appliquant la théorie de semi-groupe. D'autre part, M. L. Gårding, dans son mémoire récent [2], a montré une voie élémentaire pour le problème de Cauchy relatif à l'équation hyperbolique, où il réduit le problème à la démonstration de deux inégalités: inégalité d'énergie et celle de duale. Alors un problème se pose, celui de savoir s'il n'est pas possible de procéder de la même façon pour l'équation parabolique. Cet article est donc consacré à démontrer deux inégalités analogues, qui ont pour conséquence le résultat que voici:

Soit $\mathcal{A}(x, D)$ un opérateur p-parabolique d'ordre $m+1$ à coefficients indéfiniment différentiables uniformément bornés, alors $\mathcal{A}(x, D)$ définit un isomorphisme de $\mathcal{H}^{m+1,q}$ sur $\mathcal{H}^{o,q}$. (Voir les travaux de M. Ladyzenskaja [6], où l'on trouve le cas particulier.)

Soit $\mathcal{D}$ une bande dans R^{n+1}, définie par $\{x\in R^{n+1};\ 0\leq x_0\leq 1\}$, $\mathcal{D}_t$, π_t, et $\mathcal{D}_t^*$ sont les parties de $\mathcal{D}$ correspondant respectivement à $0\leq x_0\leq t$, $x_0=t$ et $t\leq x_0\leq 1$. Soit E^{n+1} l'espace dual de R^{n+1} par rapport à la forme bilinéaire $\langle x, \xi\rangle=\sum x_j\cdot\xi_j$; α est un multi-indice aux composants de nombre entier positif, pour lequel on associe deux normes: $|\alpha|=\sum\alpha_j$ et $|\alpha|_P=\alpha_{0P}+\alpha_i+\cdots\alpha_n$, où p est un entier défini tout à l'heure. $C^{k,q}(\mathcal{D})$ est une famille des fonctions définies dans $\mathcal{D}$, à support compact, ayant les dérivées continues jusqu'à l'ordre α, où $\alpha_0\leq k$, $|\alpha|_P\leq kp+q$; $C^\infty(\mathcal{D})=\bigcap_{k,q}C^{k,q}(\mathcal{D})$.

Soit $\mathcal{A}(x, D)=\sum\mathcal{A}_\alpha(x)D^\alpha$ $(D^\alpha=D^{\alpha_0}_{x_0}D^{\alpha_1}_{x_1}\cdots D^{\alpha_n}_{x_n})$ un opérateur différentiel défini dans $\mathcal{D}$. On dit alors avec M. Petrowsky [8] que $\mathcal{A}(x, D)$ est régulièrement p-parabolique d'ordre $m+1$, si les conditions suivantes sont satisfaites: 1) $\mathcal{A}_\alpha(x)=1$ pour $\alpha=(m+1, 0, \cdots, 0)$ et il existe un entier p tel que $|\alpha|_P\leq(m+1)p$, 2) pour les parties réelles des racines caractéristiques λ_j de $\mathcal{A}_0(x, D)$, on a une constante $\delta<0$ telle que $Re\,\lambda_j(x; \xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)\leq\delta|\xi|^P$, où l'on entend par $\mathcal{A}_0(x, D)$ la partie principale de $\mathcal{A}(x, D)$, formée des termes correspondant à $|\alpha|_P=(m+1)p$.

Pour simplifier, nous supposons dans toute la suite que les coefficients de $\mathcal{A}(x, D)$, ainsi que toutes leurs derivées, soient uniformément bornés dans $\mathcal{D}$.