48. *Ein inverser Homomorphismus der Fundamentalgruppe*

Von Joseph WEIER

(Comm. by K. KUNUGI, M.J.A., May 7, 1959)

Seien $n>2$ eine näturliche Zahl, M eine $(2n-1)$-dimensionale und N eine n-dimensionale orientierte zusammenhängende geschlossene polyedrale Mannigfaltigkeit, $H_n(M)$ die n-dimensionale ganzzahlige Bettigruppe von M und $H_n(N)$ diejenige von N, $F_a(N)$ die Fundamentalgruppe von N bezüglich eines Punktes $a \in N$, weiter

$$f: M \to N$$

eine stetige Abbildung. Dann ordnet f, wie dies unten präzisiert ist, jedem Element y aus $F_a(N)$ eindeutig ein Element $\varphi(y)$ aus $H_n(M)$ zu. Und es ist die Abbildung

$$\varphi: F_a(N) \to H_n(M)$$

ein durch f eindeutig bestimmter Homomorphismus.

Jedes Element x aus $H_n(M)$ wird durch f mit einem Grade $\gamma(x)$ in N abgebildet: Sei c ein die Orientierung von N repräsentierender n-Zyklus. Bedeuten dann ξ, ξ' zwei n-Zyklen aus der Homologieklasse x, so gibt es eine ganze Zahl α mit $f(\xi)=f(\xi')=c$. Hierauf ist $\gamma(x)=\alpha$. Bezeichnet G die additive Gruppe der ganzen Zahlen, so ist bekanntlich $\gamma: H_n(M) \to G$ ein Homomorphismus. Durch

$$F_a(N) \xrightarrow{\varphi} H_n(M) \xrightarrow{\gamma} G$$

wird jedem Element y der Fundamentalgruppe von N eine ganze Zahl $\gamma\varphi(y)$ zugeordnet.

Seien $x_1, x_2, \cdots$ diejenigen Elemente endlicher Ordnung von $H_n(M)$, die in $\varphi F_a(N)$ liegen. Dann ist die Zahl $\sum \gamma(x_i)$ eine Homotopieinvariante von f.

Jedem endlichen Erzeugendensystem Y der Gruppe $F_a(N)$, wobei $y_1, y_2, \cdots$ die Elemente von Y seien, entspricht eine ganze Zahl:

$$\Phi(Y) = \sum \gamma\varphi(y_i).$$

Unter den Zahlen $\phi(Y)$, wobei Y alle endlichen Erzeugendensysteme von $F_a(N)$ durchlaufe, befindet sich ein Maximum, wie man zeigen kann. Dieses ist durch f eindeutig bestimmt und homotopieinvariant.

Die Abbildung $\varphi: F_a(N) \to H_n(M)$ ist noch zu definieren. Hierzu seien Z ein Element aus $F_a(N)$ und z ein orientierter doppelpunktfreier geschlossener Streckenzug aus Z. Dann gibt es in jeder Nähe von f eine zu f homotope Abbildung $f': M \to N$ derart, dass $f'^{-1}(z)$ ein endliches Polyeder A der Dimension

$$(\dim M - \dim N)+1,$$

also der Dimension n ist. Die weiterhin in Rede stehenden Simplexe sind offen und gradlinig. Seien σ_i die mit einer Orientierung ver-