77. *Sur les Dérivations dans les Espaces Vectoriels Topologiques sur le Corps des Nombres Complexes. I*

Par Riichi IINO
Université de Waseda

(Comm. by K. KUNUGI, M.J.A., July 13, 1959)

On sait que la notion de la dérivée fonctionelle ou directionaire jouent un rôle important dans la théorie des champs.[1)2)] Dans cette note, nous allons généraliser les notions de la dérivée au sens de Fréchet et de la dérivée directionaire[3)] sur une classe des applications de l'espace vectoriel topologique sur le corps des nombres complexes dans l'espace du même type.

1. Notions asymptotiques. Soient E et F deux espaces vectoriels topologiques sur le corps C des nombres complexes, localement convexes, séparés et complets, Γ_E un ensemble filtrant de semi-normes définissant la topologie de E, Γ_F un ensemble de semi-normes définissant la topologie de F. Remarquons que, si Γ est un ensemble quelconque de semi-normes définissant la topologie de E, on peut obtenir un ensemble filtrant Γ_E de semi-normes définissant la même topologie que Γ.[4)]

Désignerons par $\mathcal{C}(E, F)$ l'espace de toutes les applications continues de E dans F.

Notation. Soit f un élément de $\mathcal{C}(E, F)$. On désigne par le symbole $f(x)=o(x^n)$ le fait que la condition suivante est vérifiée:

(P) Pour toute semi-norme $q\in\Gamma_F$, il existe un voisinage ouvert V de 0 dans E, une semi-norme $p\in\Gamma_E$, une fonction numérique $\varepsilon_q(x)$ à valeurs positives, telle que $\varepsilon_q(x)\to 0$ lorsque $x\to 0$ dans E, et un nombre entier $n>0$ (ne dépend que f), tels qu'on ait:

(1) $$q(f(x))\leq\varepsilon_q(x)\{p(x)\}^n, \quad \text{pour tout } x \text{ dans } V-\{0\}.^{5)}$$

Remarque 1.1. Si Γ_E est un ensemble de normes, on peut remplacer la condition (P) par la condition suivante:

(P′) Pour toute semi-norme $q\in\Gamma_F$, il existe une norme $p\in\Gamma_E$ et un nombre entier $n>0$, tels qu'on ait:

(2) $$q(f(x))/\{p(x)\}^n\to 0, \quad \text{lorsque } x\to 0 \text{ dans } E.$$

Remarque 1.2. Si E est métrisable, on peut remplacer la condition

1) K. O. Friedrichs: Mathematical Aspects of the Quantum Theory of Fields, New York (1953).

2) M. Namiki and R. Iino: Prog. Theor. Phys., Supplement, no. 5 (1958).

3) L. A. Lusternik und W. I. Soboleff: Elemente der Funktionalanalysis, Kap. VI, Berlin (1955).

4) N. Bourbaki: Espaces Vectoriels Topologiques, Chap. II, Paris, Hermann (1953).

5) Il est clair que la condition $f\in\mathcal{C}(E, F)$ n'est pas essentiel.