121. Sur les Dérivations dans les Espaces Vectoriels Topologiques sur le Corps des Nombres Complexes. II

Par Riichi IINO
Université de Waseda

(Comm. by K. KUNUGI, M.J.A., Nov. 12, 1959)

Dans la Note "Sur les dérivations dans les espaces vectoriels topologiques sur le corps des nombres complexes. I",[1] nous avons introduit les notions de la dérivée au sens de Fréchet et de la dérivée faible sur une classe des applications de l'espace vectoriel topologique sur le corps des nombres complexes, localement convexe, séparé et complet dans l'espace du même type. Dans cette note, nous allons donner la définition de la dérivée d'ordre supérieur et le développement de Taylor.

1. Polynôme et dérivée de Fréchet d'ordre supérieur. Désignerons par E et F deux espaces vectoriels topologiques sur le corps C des nombres complexes, localement convexes, séparés et complets. Soit $(x_1,\cdots,x_n)\to a_n(x_1,\cdots,x_n)$ une application multilinéaire continue et symétrique[2] de $\prod_{i=1}^{n} E_i$, où $E_i=E$ pour tout i, (se note E^n) dans F. En prenant $x_i=x$ $(1\leq i\leq n)$ et posant $a_nx^n=a_n(x,\cdots,x)$, $x\to a_nx^n$ est une application continue de E dans F; a_nx^n s'appelle monôme de degré n. Compte tenu de l'exemple 1.1 et du théorème 3.1 (I), on peut voir facilement que le monôme a_nx^n est dérivable au sens de Fréchet partout dans E et faiblement dérivable partout dans E au long de h pour tout $h\in E$.

Soient a_0 un point fixé de F et $a_1x, a_2x^2,\cdots,a_nx^n$, monômes des degrés $1,2,\cdots,n$, respectivement. On dit que une fonction $P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$ définie sur E à valeurs dans F est un polynôme de degré n. Il est clair que l'application $x\to P(x)$ est une application continue de E dans F, dérivable au sens de Fréchet partout dans E et faiblement dérivable partout dans E au long de h pour tout $h\in E$.

Soient V un voisinage ouvert de 0 dans E, x_0 un point de E, $U=x_0+V$, et f une application de U dans F.

Définition 1.1. On dit que f est $n(\geq 1)$ fois dérivable au sens de Fréchet au point x_0, si une formule suivante a lieu:

(1) $f(x_0+h)-f(x_0)=P_n(h)+\alpha_n(x_0;h)$, pour tout h dans $V-\{0\}$,

où $P_n(h)=a_1h+a_2h^2+\cdots+a_nh^n$ un polynôme de degré n sans terme

1) Proc. Japan Acad., **35**, no. 7, 343-348 (1959). Nous noterons par (I) cette Note.

2) On appelle symétrique une application T de E^n dans F, telle que l'on ait $T(x_1,\cdots,x_n)=T(x_{\sigma(1)},\cdots,x_{\sigma(n)})$ pour toute permutation σ de l'ensemble $(1,2,\cdots,n)$.