142. Sur la Théorie Générale des Ensembles Partiellement Ordonnés. II

Par Mihail BENADO

(Comm. by K. KUNUGI, M.J.A., Nov. 12, 1960)

2. *Structures topologiques et géométrico-topologiques.* 2.1. *Définition.* Je dirai que la configuration $\mathfrak{P}$ *est munie d'une structure topologique relative,* lorsqu'on se donne une fonction $f(x, y)=\bar{y}^x$ aux arguments $x, y \in \mathfrak{P}$ tels que $x \geq y$ et aux valeurs dans $\mathfrak{P}$, telle que les trois conditions suivantes soient en puissance (cf. mon travail [1]):

FR1. *On a* $\bar{x}^x = x$ *pour chaque* $x \in \mathfrak{P}$

FR2. *Pour tous les* $x, y \in \mathfrak{P}$ *tels que* $x \geq y$, *on a* $\overline{\bar{y}^x}^x \leq \bar{y}^x$

FR3. *Pour tous les* $x, y, z \in \mathfrak{P}$ *tels que* $x \geq y \geq z$, *on a* $\bar{y}^x \geq \bar{z}^x \geq \bar{z}^x$

2.1.1. On montre aisément qu'on a

$$x \geq \bar{y}^x \geq y \quad (x, y \in \mathfrak{P} \text{ tels que } x \geq y)$$

$$\overline{\bar{z}^y}^x = \bar{z}^x \quad (x, y, z \in \mathfrak{P} \text{ tels que } x \geq y \geq z);$$

en outre, la condition FR2 laisse renforcer

FR2'. $\overline{\bar{y}^x}^x = \bar{y}^x$, *pour tous les* $x, y \in \mathfrak{P}$ *tels que* $x \geq y$

2.1.2. En supposant que x est fixe et faisant varier y tel que $y \leq x$ on voit que $\bar{y}^x$ est un opérateur de fermeture au sens de M. Öystein Ore [2], dans l'ensemble des $y \leq x$.

2.1.3. Certaines questions nequièrent l'nitervention des structures géométriques et topologiques d'une configuration; cf. par exemple la théorie abstraite du conducteur [3]. C'est alors une certaine combinaison des propriétés des deux structures qui s'avére propre à l'examen de la question, telle la condition suivante (cf. [1] et mon rapport [4], §9):

2.2. *Définition.* Je dirai qu'une structure topologique relative de $\mathfrak{P}$ est *unitaire* par rapport à quelque (Υ, Σ)-structure géométriquee lorsque

FR4. *Pour tous les* $a, d, e, x, y \in \mathfrak{P}$ *tels que* $d\Upsilon\{a, x\}$, $e\Upsilon\{a, y\}$, $d \geq e$ *et* $x \geq y$, *on a* $\bar{e}^d \Upsilon\{\bar{a}^d, \bar{y}^x\}$

2.3. Une autre condition importante à maints égards est *l'axiome de Kuratowski*

FRK. *Pour tous les* $a, b, d, u \in \mathfrak{P}$ *tels que* $u \geq a$, $u \geq b$ *et* $u \geq d\Upsilon\{a, b\}$, *on a* $\bar{d}^u \Upsilon\{\bar{a}^u, \bar{b}^u\}$, cf. [3].

Cette condition FRK est une conséquence presque triviale de FR4, *pour ou que* Υ *soit naturelle,* donc telle que *pour tous les* $a, b \in \mathfrak{P}$ *tels que* $a \geq b$, *on ait* $a\Upsilon\{a, b\}$.