140. Sur le Théorème de Fubini et l'Intégrale (E. R.). I

Par Shizu NAKANISHI

(Comm. by K. KUNUGI, M.J.A., Nov. 12, 1960)

Dans la Note précédente,[1] nous avons fait son étude de la propriété de Fubini de la suite fondamentale. Dans cette Note, nous allons étudier celle de l'intégrale (*E. R.*). Un résultat principal est la proposition suivante.

Proposition 1. *Soit $f(x, y)$ une function intégrable (E. R.) dans l'intervalle $I_0=[a, b; c, d]$, définie par une suite fondamentale $u=\{u_n\}$, $u_n=V(F_n, \nu_n; f_n)$, où $f_{n+1}(x, y)$ s'écrit $f_{n+1}(x, y)=f_n(x, y)+r_n(x, y)+p_n(x, y)$. Supposons que la suite fondamentale satisfait, outre qu'elle satisfait aux conditions [1-3], (P) et (P*),[2] aux quatre conditions suivantes:*

(*) *Soit I_i $(i=1, 2, \cdots, i_0)$ un système de normbre fini de produits directs $[a, b]\times J_i$ $(J_i\subseteq[c, d])$ sans points commun deux à deux. Si, pour tout i, les extrémités de J_i appartiennent à l'ensemble proj. ${}_yF_n$, exclu un ensemble de mesure nulle N_0 ne contenant pas les points $y=c$ et d, on a*

$$\sum_{i=1}^{i_0}\left|\iint_{I_i} r_n(x, y)\, dx\, dy\right|<2^{-\nu_n}. \qquad (n=0, 1, 2, \cdots)$$

(P_1) *Pour tout produit direct $I=[a, b]\times J$ $(J\subseteq[c, d])$, il existe une fonction $\phi_I(n)$ de n $(n=0, 1, 2, \cdots)$ qui jouit des conditions suivantes:*

1) $\phi_I(n)>0$ *pour* $n=0, 1, 2, \cdots$;

2) $\lim_{n\to\infty}\phi_I(n)=0$;

3) *pour tout ensemble E contenu dans l'intervalle I et qu'on ait* $\text{mes}\, E<\text{mes}\,(I-F_n)$, *on a*

$$\iint_E |f_n(x, y)|\, dx\, dy\leq\phi_I(n);$$

4) *il existe une suite des nombres positives α_n $(n=0, 1, 2, \cdots)$ telle qu'on ait $\lim_{n\to\infty}\alpha_n=0$ et qu'on ait*

$$\sum_{i=1}^{i_0}\phi_{I_i}(n)\leq\alpha_n,$$

quel que soit le système de produits directs $I_i=[a, b]\times J_i$ $(i=1, 2, \cdots, i_0)$ $(J\subseteq[c, d])$ sans points commun deux à deux.

(P_1^*) *Pour presque tout y de $[c, d]$, il existe un entier positif*

---

1) S. Nakanishi: Sur le théorème de Fubini et les suites fondamentales, Proc. Japan Acad., **35**, 161-166 (1959).

2) Pour la définition, voir T. Ikegami: A note on the integration by the method of ranked spaces, Proc. Japan Acad., **34**, 16-21 (1958).