22. Sur la Théorie Générale des Ensembles Partiellement Ordonnés. IV

Par Mihaïl BENADO

(Comm. by K. KUNUGI, M.J.A., Feb. 13, 1961)

Résumé. Suite des mes notes précédentes [1] de cette série, et dont je présuppose la connaissance. Les résultats de la présente note sont extraits de mon travail [2] consacré à la théorie des structures géométriques distributives.

1. *Structures géométriques distributives; définitions.* 1.1. *Définition.* J'appelle *G-distributive* toute (Υ, Σ)-structure géométrique de la configuration $\mathfrak{P}$ telle que les relations $a, b, b', d, m \in \mathfrak{P}$, $d\Upsilon\{a, b\}$, $d\Upsilon\{a, b\}$, $m\Sigma\{a, b\}$ et $m\Sigma\{a, b'\}$ entraînent l'égalité $b=b'$.

1.2. *Définition.* J'appelle *G*-distributive* toute (Υ, Σ)-structure géométrique de $\mathfrak{P}$ telle que les relations $a, b, b', d, d', m, m' \in \mathfrak{P}$, $d\Upsilon\{a, b\}$, $d'\Upsilon\{a, b\}$, $m\Sigma\{a, b\}$, $m'\Sigma\{a, b'\}$, $d \geq d'$ et $m \geq m'$ entraînent l'inégalité $b \geq b'$.

La propriété d'une structure géométrique d'être G^*-distributive est en quelque sorte, la réciproque de la propritété d'être partiellement monotone ([1], I, 1.6.3).

1.3. *Définition.* J'appelle *U-distributive* toute (Υ, Σ)-structure géométrique de $\mathfrak{P}$ telle que pour tous les $a, b, d, m, x \in \mathfrak{P}$ satisfaisant à $d\Upsilon\{a, b\}$, $m\Sigma\{a, b\}$ et $d \geq x \geq m$ l'existence les éléments $a', b' \in \mathfrak{P}$ tels que $m \leq a'\Sigma\{a, x\}$ et $m \leq b'\Sigma\{b, x\}$, ($a_1, b_1 \in \mathfrak{P}$, tels que $d \geq a_1\Upsilon\{a, x\}$ et $d \geq b_1\Upsilon\{b, x\}$) entraînent la relation $x\Upsilon\{a', b'\}$ ($x\Sigma\{a_1, b_1\}$). La structure géométrique *discrète* ([1], I, 1.5.1) *de n'importe quelle* configuration est U-distributive.

1.4. *Définition.* J'appelle *C-distributive* ou *cartésienne* toute (Υ, Σ)-structure géométrique de $\mathfrak{P}$ telle que les relations $a, b, d, m \in \mathfrak{P}$, $d\Upsilon\{a, b\}$ et $m\Sigma\{a, b\}$ entraînent les isomorphismes au sens de l'ordre partiel que voici: $(d/a)\times(d/b) \leftrightarrows d/m \leftrightarrows (a/m)\times(b/m)$.

2. *Propriétés.* 2.1. *Théorème.* G^**-distributivité* (1.2) *entraîne* *G-distributivité* (1.1) *et celle-ci entraîne K-modularité* ([1], II, 1.1). *D'autre part, la propriété de U-distributivité est invariante par homomorphisme géométrique.*

2.2. *Théorème. Toute (Υ, Σ)-structure géométrique analytique, fermée et G-distributive de $\mathfrak{P}$, possède les propriétés suivantes:* 1. *Elle est O-modulaire* ([1], II, 1.2), 2. *Elle est forte* ([1], II, 2.8) *et partant, saturée* ([1], I, 1.6.8), 3. *Elle est W-modulaire* ([1], II, 1.3), 4. *Elle est G*-distributive* (1.2), 5. *Elle est à interpolation cartésienne* ([1], I, 1.6.5), 6. *Elle est U-distributive,* 7. *Elle est cartésienne* (1.4).