30. La Solvabilité de Certains Equations sur les Nombres Ordinaux Transfinis. I

Par Sôkiti NAGAI

Institut de Mathématiques, l'Université d'Iwaté, Morioka, Japon

(Comm. by Z. SUETUNA, M.J.A., March 13, 1961)

Dans sa note,[1] M. W. Sierpiński a démontré qu'il n'existe aucune solution pour l'équation (A) $\varphi^2=\psi^3+1$ sur les nombres ordinaux transfinis φ et ψ, et en généralisant ce résultat, M. S. Świerczkowski[2] a démontré la même propriété pour l'équation (B) $\varphi^{\vartheta}=\psi^{\iota}+q$, où ϑ et ι sont les nombres ordinaux isolés qui sont plus large que 1, et q est un nombre naturel.[3]

En généralisant l'équation (A), nous discuterons les solutions d'équations telles qu'on ait

(E) $\varphi^{m_1}a_1+\varphi^{m_2}a_2+\cdots+\varphi^{m_p}a_p+a_{p+1}=\psi^{n_1}b_1+\psi^{n_2}b_2+\cdots+\psi^{n_q}b_q+b_{q+1}$,

où p, q; m_i, a_i $(1\leqq i\leqq p)$; n_j et b_j $(1\leqq j\leqq q)$ sont les nombres naturels tels que $m_{i-1}>m_i$ $(2\leqq i\leqq p)$ et $n_{j-1}>n_j$ $(2\leqq j\leqq q)$, et a_{p+1}, b_{q+1} sont les nombres finis. Or, sans perdre la généralité, nous pouvons supposer que φ soit plus large que ψ. Alors, on peut distinguer les quatre cas suivant que φ, ψ sont les nombres limites ou bien isolés. Or, si φ est isolé, nous avons

$$\begin{aligned}\varphi^{m_1}a_1+\varphi^{m_2}a_2+\cdots+\varphi^{m_p}a_p+a_{p+1}\equiv&(\bar{\varphi}^{m_1}a_1+\bar{\varphi}^{m_1-1}\nu+\cdots+\bar{\varphi}^{m_2+1}\nu)\\&+(\bar{\varphi}^{m_2}(a_2+\nu)+\bar{\varphi}^{m_2-1}\nu+\cdots+\bar{\varphi}^{m_3+1}\nu)+\cdots+(\bar{\varphi}^{m_p}(a_p+\nu)+\bar{\varphi}^{m_p-1}\nu\\&+\cdots+\bar{\varphi}\nu)+(a_{p+1}+\nu),^{4)}\end{aligned}$$

où $\varphi=\bar{\varphi}+\nu$, $\bar{\varphi}$ est limite et ν est naturel.

Le but de cette note est de déterminer tous les types de l'équation (E) solvable et ses solutions correspondantes pour le cas fondamental où les solutions de l'équation (E) sont les nombres limites.

Or, la méthode de MM. Sierpiński et Świerczkowski employée dans les considérations des équations (A) et (B) est de comparer les deux côtés de l'équation donnée, en utilisant les formes normales de φ et ψ. Mais, elle est inconvenable pour traiter généralement l'équation (E), puisque la relation entre φ et ψ n'est pas précisée. Donc, en définissant les polynômes finis des nombres ordinaux transfinis dans la

1) W. Sierpiński: Sur l'équation $\xi^2=\eta^3+1$ pour les nombres ordinaux transfinis, Fund. Math., **43** (1956).

2) S. Świerczkowski: On some equation in transfinite ordinals, Fund. Math., **45** (1958).

3) Il y a encore une autre généralisation des résultats de Sierpiński:[1] Wang, Shuh Tang and Wang, Keh Shien: On some equations of ordinal numbers, Advancement in Mathematics, **3**, 646–649 (1957).

4) H. Bachmann: Transfinite Zahlen, 1955, §12, 1. Allgemeine Rechenregeln. Sur les calculs de cette Note, nous employons les règles de ce livre.