161. Existence des Solutions de Classe Supérieure dans les Équations Différentielles Faiblement Hyperboliques à Coefficients Variables

Par Yujiro OHYA
Université de Kyoto

(Comm. by K. KUNUGI, M.J.A., Dec. 12, 1962)

1. *Introduction.* Proposons-nous dans cette note d'étudier l'existence des solutions de classe $\alpha\left(1<\alpha<\dfrac{m}{m-1}\right)$ du problème de Cauchy pour des équations aux dérivées partielles (linéaires) hyperboliques avec caractéristiques multiples à coefficients variables (qui sont de fonctions de classe α). D'abord, nous préciserons le mot "faiblement hyperbolique". Pour fixer les idées, considérons l'équation aux dérivées partielles d'order m:

(1.1) $$[p+q]\left(x, t; \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right)u(x, t)=f(x, t) \quad x\in R^n, t\in R^1$$

où $p\left(x, t; \dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial t}\right)$ est un polynôme de dérivation homogène d'ordre m en

$\left(\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial t}\right)$ à coefficients variables

$q\left(x, t; \dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial t}\right)$ est aussi, mais l'ordre $\leq m-1$

alors on la dit hyperbolique par rapport à t comme d'habitude, si l'équation caractéristique

(1.2) $p(x, t; \xi, \lambda)=0$ a des racines réelles $\lambda_i(x, t; \xi)$ $(i=1, 2, \cdots m)$
(x, t) parcourant un domaine de $R^n\times R^1$, $\xi\in\Xi^n$.

Ici, il nous arrive deux-cas, c'est-à-dire, toutes les $\lambda_i(x, t; \xi)$ sont distinctes, et contraires. Appelerons-nous celui-là fortement (ou régulièrement) hyperbolique et celui-ci faiblement.

Jusqu'à maintenant, le problème de Cauchy pour le dernier reste ouvert, sans aucune restriction de $q\left(x, t; \dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial t}\right)$ dans (1.1) ([4]: [9]). Mais, M. L. Hörmander a montré dans sa leçon [3] l'existence des solutions de classe α pour les équations différentielles faiblement hyperboliques à coefficients constants, en utilisant la solution élémentaire de $[p+q]\left(\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial t}\right)$.*) On va l'étendre au cas des coefficients

*) Aussi, M. M. Matsumura l'a montré par la méthode différente qui n'est pas publiée.