22. *Zu einer Franzschen Spurformel. II*

By Joseph WEIER

(Comm. by Kinjirô KUNUGI, M.J.A., Feb. 12, 1963)

Seien M, N orientierte kompakte geschlossene polyedrale Mannigfaltigkeiten, $m=\dim M$, $n=\dim N$ und $d=m-n>0$, ferner f, g: $M\to N$ stetige Abbildungen. Das Uebereinstimmungsgebilde von f, g sei ein endliches d-dimensionales Polyeder P. Seien K eine Zellenzerlegung von M, die in P die Zellenzerlegung L induziert. Der ganzzahlige Zyklus z sei die übliche algebraische Bewertung von L durch (f, g). Die topologische Abbildung ϕ: $P\to M\times N$ sei durch

$$\phi(p)=p\times f(p)=p\times g(p)$$

bestimmt. Sei $P^*=\phi(P)$, $L^*=\phi(L)$ und $z^*=\phi(z)$. Bezeichnet π: $M\times N\to M$ die Abbildung $\pi(p, q)=p$, so ist $\pi|P^*=\phi^{-1}$.

1. Seien $x_1^\alpha, x_2^\alpha, \cdots$ ganzzahlige α-dimensionale Zyklen in M, die eine α-dimensionale Homologiebasis von M bilden. Zu jedem α-Zyklus x aus M gibt es also ganze Zahlen ζ^k mit $x\sim\sum\zeta^k x_k^\alpha$. Und aus $\sum\zeta^k x_k^\alpha\sim 0$ folgt $\zeta^k=0$ für alle k. Entsprechend sei $y_1^\alpha, y_2^\alpha, \cdots$ eine α-Homologiebasis von N. Wegen $\partial(x\times y)=(\partial x)\times y\pm x\times\partial y$ (man vergleiche etwa [4]) sind die Ketten

$$x_i^{d-\alpha}\times y_j^\alpha \quad (\alpha=0,1,\cdots,d,\ i,j,=1,2,\cdots)$$

Zyklen in $M\times N$. Bekanntlich bilden sie eine d-Homologiebasis von $M\times N$.

Es gibt also Zahlen $c^{\alpha ij}$ mit

$$(1) \qquad z^*\sim\sum_\alpha\sum_{ij}c^{\alpha ij}x_i^{d-\alpha}\times y_j^\alpha.$$

Mit $z^*=\sum_{ij}x_i^{d-\alpha}\times y_j^\alpha$ ist daher $z\sim\sum_\alpha z_\alpha^*$. Sei jetzt

$$(2) \qquad z_\alpha=\pi(z_\alpha^*).$$

Dann besagt ein bekannter Satz, der auch in den Beweis [2] der Franzschen Spurformel eingeht: die z_α hängen bis auf nullhomologe Bestandteile nicht von der besonderen Wahl der Basen (x) und (y) ab.

2. Offenbar ist $z=\phi^{-1}(z^*)=\pi(z^*)\sim\pi(\sum z_\alpha^*)=\sum z_\alpha$, daher

$$(3) \qquad z\sim\sum z_\alpha.$$

Der Zyklus z ist zwar durch f, g fixiert. Die Zyklen z_α sind aber insofern innerhalb M verlegbar, als die Wahl der x und y nicht fest vorgegeben ist. Man kann daher annehmen, dass sich z und z_α zueinander in allgemeiner Lage befinden, dass also für $2d\geq m$ gilt:

$$\dim(z\cap z_\alpha)=2d-m,$$

sofern nicht z und z_α zueinander fremd sind. Weiterhin sei $2d\geq m$.

Für jedes α betrachten wir die zusammenhängenden Zyklen, aus denen $z\cap z_\alpha$ besteht: Sie mögen

$$z_{\alpha\beta} \quad (\beta=1,2,\cdots)$$