90. *Représentations unitaires du groupe des déplacements du plan $\mathfrak{p}$-adique*

Par Masahiko SAITO

Institut de Mathématiques, Université de Tokyo

(Comm. by Zyoiti SUETUNA, M.J.A., Sept. 12, 1963)

1. Le but de cette note est une extension au cas $\mathfrak{p}$-adique des résultats de Vilenkin sur les représentations du groupe des déplacements euclidiens [1]. En calculant explicitement les coefficients matriciels des représentations unitaires irréductibles à l'aide d'une base naturelle, on est conduit à une certaine classe de fonctions que l'on pourrait appeler les fonctions de Bessel $\mathfrak{p}$-adiques. En particulier les fonctions sphériques zonales s'expriment par les fonctions de Bessel $\mathfrak{p}$-adiques d'indice 0, qui essentiellement n'est autre qu'une somme de Gauss du corps des restes.

L'exposé détaillé avec démonstrations paraîtra ultérieurement.

2. Soient $\mathfrak{k}$ le complété d'un corps de nombres algébriques par rapport à une valuation discrète, $\mathfrak{o}$ l'anneau des entiers de $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{p}$ l'idéal premier de $\mathfrak{o}$ et t un élément premier de $\mathfrak{p}$. Si τ est une racine carrée de t, $\mathfrak{k}(\tau)$ est une des deux extensions quadratiques ramifiées de $\mathfrak{k}$. Il existe encore une extension quadratique non-ramifiée, qu'on ne traite pas ici. Nous supposerons $p-1>2e$, p et e étant respectivement le caractéristique du corps ses restes $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$ et l'indice de ramification de $\mathfrak{p}$ au-dessus de p.

Introduisons deux fonctions trigonométriques $\mathfrak{p}$-adiques définies sur $\mathfrak{o}$ à valeurs dans $\mathfrak{o}$ par les séries convergents:

$$\mathfrak{c}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n x^{2n}}{(2n)!},\quad \mathfrak{s}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Les formules suivantes ont lieu:

$$\begin{aligned}&\exp \tau x=\mathfrak{c}(x)+\mathfrak{s}(x),\\ &\mathfrak{c}(x)^2-t\mathfrak{s}(x)^2=1,\\ &\mathfrak{c}(x+y)=\mathfrak{c}(x)\mathfrak{c}(y)+t\mathfrak{s}(x)\mathfrak{s}(y),\\ &\mathfrak{s}(x+y)=\mathfrak{c}(x)\mathfrak{s}(y)+\mathfrak{s}(x)\mathfrak{c}(y).\end{aligned}$$

Lemme. *Soient a et b deux éléments de $\mathfrak{k}$ satisfaisant à la relation $a^2-tb^2=1$. Alors a et b sont entiers et $a\equiv 1$* (mod $\mathfrak{p}$). *Si en particulier $a\equiv 1$* (mod $\mathfrak{p}$), *il existe un seul élément θ dans $\mathfrak{o}$ tel qu'on ait $a=\mathfrak{c}(\theta)$ et $b=\mathfrak{s}(\theta)$.*

Soit G le groupe des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix}1 & x & y\\ 0 & \mathfrak{c}(\theta) & \mathfrak{s}(\theta)\\ 0 & t\mathfrak{s}(\theta) & \mathfrak{c}(\theta)\end{pmatrix}$$