4. *Sur une fonction continue qui est partout non dérivable*

By Shizu NAKANISHI

(Comm. by Kinjirô KUNUGI, M.J.A., Jan. 13, 1964)

Il y a un siècle que K. Weierstrass a donné une solution définitive au problème d'existence de la dérivée pour les fonctions continues les plus générales; il a montré, en effet, qu'il existe une série trigonométrique uniformément convergente mais qui n'a aucun point où la somme est dérivable. Depuis on a construit plusieurs exemples plus simples envisageant divers buts. Or, nous y ajouterons un autre; *nons donnerons un exemple d'une fonction réelle* $f(x)$, *définie pour* $0\leq x\leq 1$ *et intégrable E.R.*,[1] *dont l'intégrale indéfinie*

$$F(x)=(E.R.)\int_0^x f(t)\,dt \quad 0\leq x\leq 1$$

est une fonction continue sans dérivée.[2]

Notre exemple montre bien, d'une part, que l'intégrale *E.R.* indéfinie n'est pas toujours à variation bornée (car, d'après le théorème de H. Lebesque une telle fonction admettrait presque partout une dérivée finie) et, d'autre part, que l'intégrale *E.R.* diffère de celle de Denjoy-Perron ou même de Burkill. Mais, nons croyons que ce qui nous intêresse le plus c'est le fait que *la notion de l'intégration n'est pas toujours l'inverse de celle de la dérivation.*

Commençons par la définition d'ensemble $H[[a,b],\ l]$, où $[a,b]$ est un intervalle $a\leq x\leq b$ et l est un nombre positif ≥ 1. Définissons d'abord par récurrence, une famille dénombrable $\{L_{np}\}$ d'intervalles ouverts, deux à deux sans point commun, de la manière suivante:

L'entier n prend toutes les valeurs ≥ 1; pour chaque valeur de n, p prend les valeurs $1,2,\cdots,2^{n-1}$. Tous les intervalles L_{np} sont contenus dans $[a,b]$, et on prend $L_{11}=(c,d)$, où c et d sont deux points tels que $\frac{c+d}{2}$ est le point milieu de $[a,b]$ et $d-c=\frac{1}{4}\frac{b-a}{l}$. Supposons ensuite les 2^k-1 intervalles $L_{n,p}$ définis pour $1\leq n\leq k$, de sorte que, si M_k est leur réunion, l'ensemble $[a,b]\cap M_k^c$[3] sont la réunion de 2^k intervalles fermés $K_{kp}(p=1,2,\cdots,2^k$, de gauche à droite)

---

1) Pour la définition, voir Kinjirô Kunugi: Sur une généralization de l'intégrale, Fundamental and Applied Aspects of Mathematics, Research Institute of Applied Electricity, Hokkaido University, 1-30 (1960).

2) Dans la Note "S. Nakanishi: Sur la dérivation d'une intégrale *E.R.* indéfinie, Proc. Japan Acad., **37**, 316-318 (1961)," nous avons montré que l'intégrale *E.R.* indéfinie n'admet pas une dérivée en tout point d'ensemble de mesure positive.

3) M_k^c désigne complément de M_k.