56. *Sur les facteurs de convergence des séries de Walsh-Fourier*

Par Satoru IGARI
Université de Paris et Université du Tôhoku
(Comm. by Kinjirô KUNUGI, M.J.A., April 13, 1964)

1. Soit $\phi_0(x)$ une fonction de période 1, dont la valeur est égale à 1 pour $0\leqq x<1/2$, à -1 pour $1/2\leqq x<1$, et posons $\phi_n(x)=\phi_0(2^n x)$ pour $n=1,2,\cdots$. Alors le système des fonctions de Walsh $\{\psi_n(x)\}_{n=0,1,2,\cdots}$ est défini par

$$\psi_n(x)=\prod_i \phi_i^{\varepsilon_i}(x)$$

où $n=\sum\varepsilon_i 2^i$, $\varepsilon_i=0$ ou 1, est le développement dyadique de n.

Soit f une fonction sommable sur $(0,1)$. On en désigne le développement de Walsh-Fourier par

$$f(x)\sim\sum_{n=0}^{\infty}a_n\psi_n(x),\quad \text{où}\quad a_n=\int_0^1 f(x)\psi_n(x)dx,$$

et les sommes partielles de la série de Walsh-Fourier de f par

$$S_n(x;f)=\sum_{k=0}^{n}a_k\psi_k(x).$$

Le but de notre étude est de démontrer les théorèmes suivants, qui avaient été énoncés par R. E. A. C. Paley [2] dont le cas $p=2$ a été démontré par S. Yano [3], mais, à la connaissance de l'auteur, la démonstration du cas général n'est pas encore publiée.

Théorème 1. (i) *Soit $f\in L^p(0,1)$, $1<p\leqq 2$, alors*

$$S_n(x;f)=o\{(\log n)^{1/p}\}$$

presque partout, et

$$\int_0^1 \sup_{n\geqq 2}\frac{|S_n(x;f)|^p}{\log n}dx\leqq A_p\int_0^1|f(x)|^p dx,$$

où A_p est une constante indépendante de f et $A_p=O(p-1)^{-1}$.

(ii) *Soit $f\in L\log^+L(0,1)$, alors*

$$\int_0^1 \sup_{n\geqq 2}\frac{|S_n(x;f)|}{\log n}dx\leqq B\int_0^1|f(x)|\log^+|f(x)|dx+C$$

avec certaines constantes absolues B et C.

(iii) *Soit $f\in L(0,1)$, alors*

$$S_n(x;f)=o(\log n)\quad \textit{presque partout.}$$

Théorème 2. (i) *Soit $f\in L^p(0,1)$, $1<p\leqq 2$ et soit*

$$S_{p,n}(x;f)=\sum_{k=2}^{n}\frac{a_k}{(\log k)^{1/p}}\psi_k(x)$$

alors