# 133. Über die Klassenzahl eines relativ-zyklischen Zahlkörpers vom Primzahlgrade

Von Sige-Nobu KURODA

Mathematisches Institut, Universität zu Tokyo

(Comm. by Zyoiti SUETUNA, M.J.A., Oct. 12, 1964)

In den folgenden Zeilen beweisen wir einige Sätze über die Klassenzahl eines (relativ-)zyklischen Zahlkörpers vom Primzahlgrade.

Satz 1. *Es sei $K/k$ ein relativ-zyklischer Zahlkörper vom Primzahlgrade $l$ derart, dass es ein und nur ein zwischen $K$ und $k$ verzweigtes (endliches) Primideal von $k$ gibt. Es bezeichne $h_k$ bzw. $h_K$ die Klassenzahlen von $k$ und $K$. (Dann ist bekanntlich $h_K$ teilbar durch $h_k$.) Wenn $h_k$ zu $l$ prim ist, dann gilt*

$$h_K/h_k \equiv 1 (\mathrm{mod}\ l).^{1)}$$

*Wenn es ferner keine zwischen $K$ und $k$ verzweigte unendliche Primstelle gibt, dann ist jede Einheit von $k$ Norm einer Einheit von $K$.*

Genauer gilt der

Zusatz 1. *Es genüge $K/k$ den Bedingungen im Satz 1 ausgenommen der letzten Bedingung über unendliche Stelle. Ferner sei $K/k_0$ ein relativ-zyklischer Zahlkörper vom $l^n$-ten Grade ($n \geq 1$) derart, dass $K \supset k \supset k_0$ gilt. $p$ bedeute eine beliebige Primzahl. Es sei $(h_K/h_k)_p$ der $p$-Betrag von $h_K/h_k$. Dann gilt*

$$(h_K/h_k)_p \equiv 1 (\mathrm{mod}\ l^n).$$

*Anders gesagt ist $h_K/h_k$ Norm (im rationalen Zahlkörper $Q$) eines zu $l$ primen ganzen Ideals aus dem Wertkörper der zur Galoisgruppe von $K/k_0$ gehörigen einfachen Charaktere.*[2)]

Es sei noch bemerkt, dass der Typus der Primzerlegung von $h_K$ wie folgt eingeschränkt wird. $\mathfrak{P}$ sei ein (und nur ein) zwischen $K/k_0$ verzweigtes Primideal von $K$. $k_0$ darf ohne Einschränkung der Allgemeinheit als Trägheitskörper von $\mathfrak{P}$ angenommen werden. Es sei ferner $K = k_n \supset k_{n-1} \supset \cdots \supset k_0$ die Reihe der sämtlichen Zwischenkörper von $K/k_0$, und es bezeichne $h_i$ die Klassenzahl von $k_i$. Dann folgt aus dem obigen Zusatz, dass $h_n/h_0$ wie $\prod_{i=1}^{n} h_{\chi_i}$ zerlegt wird, wo $h_{\chi_i} = h_i/h_{i-1}$ Norm (in $Q$) eines zu $l$ primen ganzen Ideals aus dem Wertkörper der zur Galoisgruppe von $k_i/k_0$ gehörigen einfachen Charaktere.[2)]

1) Ein Satz von Iwasawa [3] besagt, dass unter diesen Voraussetzungen $h_K$ zu $l$ prim ist. Für den absoluten Fall siehe auch Leopoldt [5] und Moriya [7].

2) Leopoldt [6] hat eine Zerlegungsformel für die Klassenzahl der beliebigen reellen abelschen absoluten Zahlkörpers $K$ gewonnen (Satz 21), die einen Faktor $\Pi h_{\tilde{\chi}}$ enthält, wo $\tilde{\chi}$ eine Abteilung der Charaktergruppe der Galoisgruppe von $K/\mathrm{Q}$, und $h_{\tilde{\chi}}$ die Norm (in $Q$) eines ganzen Ideals aus dem Wertkörper der zu $\tilde{\chi}$ gehörigen einfachen Charaktere.