30. *Sur une Représentation de la Fonction Delta de Dirac. I*

Par Shizu NAKANISHI
Université d'Osaka Préfecture

(Comm. by Kinjirô KUNUGI, M.J.A., Feb. 12, 1965)

I. L. Bondi a déjà montré dans son travail: A-integral and generalized functions, Usp. Mat. Nauk, 19 (1964), que toute distribution T s'écrit sous une forme d'intégrale, utilisant l'integrale (A), c.-à-d. il existe une fonction $f(x)$ telle qu'on ait $\mathrm{T}(\varphi)=(\mathrm{A})\int f(x)\varphi(x)dx$ pour toute fonction $\varphi(x)$ à dérivée bornée. Mais, on voit que le noyau $f(x)$ introduit par Bondi n'est localement borné en aucun point.

Dans une série de ces Notes, en utilisant l'intégrale (E.R. ν),[1] nous donnerons, pour la fonction de Dirac δ, d'autres représentations que celle de Bondi, par l'integrale. Nous avons vu[2] que l'intégrale (A) coincide avec l'integrale (E.R.), et que l'intégrale (E.R.) coincide avec l'intégrale (E.R. ν), si l'on prend pour ν la mesure de Legesgue. Nous prenons ici pour ν une mesure définie par $\nu(A)=\int_A x^{-2}e^{-\frac{1}{|x|}}dx$. D'abord, nous montrerons dans cette note que la fonction de Dirac δ s'écrit sous une forme d'integrale de la manière suivante:
quelle que soit la fonction $\varphi(x)$ bornée et continue au point $x=0$, on a

$$\delta(\varphi)=(\mathrm{E.R.}\ \nu)\int\Big(K_1(x)\varphi(x)-\sum_{j=2}^{\infty}K_j(\lambda_j(x))\varphi(\lambda_j(x))\lambda_j'(x)\Big)dx,$$

où $K_1(x)$, $\sum_{j=2}^{\infty}K_j(\lambda_j(x))\lambda_j'(x)$ sont les fonctions bornées sauf au point $x=0$ et $\lambda_j(x)$ est l'application bornée à derivée bornée.

L'entier j prend toutes les valeurs ≥ 2; pour chaque valeur de j, considérons les points de division $a_{j,i}(i=0, 1, 2, \cdots, j-1)$ tels que

$$a_{j,0}=\frac{1}{j+1}<a_{j,1}<a_{j,2}<\ \cdots\ <a_{j,j-1}=\frac{1}{j}$$

et on ait $a_{j,i}-a_{j,i-1}=\dfrac{1}{j(j^2-1)}$ pour tout $i=1, 2, \cdots, j-1$. Désignons par λ_{ji} les applications linéaires des intervalles $[a_{j,j-i-1}, a_{j,j-i}]$ sur les intervalles $\left[\dfrac{1}{i+1}, \dfrac{1}{i}\right]$, telles que $\lambda_{ji}(a_{j,j-i-1})=\dfrac{1}{i+1}$ et $\lambda_{ji}(a_{j,j-i})=\dfrac{1}{i}$.

1) Pour la définition, voir Hatsuo Okano: Sur une généralisation de l'intégrale (E.R.) et un théorème généralisation de l'intégration par parties. J.M.S. of Japan, 430-442 (1962).

2) Voir I. Amemiya and T. Ando: On the class of functions integrable in a certain generalized dense. Hokkaido University, Department of Mathematics and Research Institute of Applied Electricity, **17**, 127-140 (1964).