24. Sur la Régularité au Bord des Solutions des Équations Paraboliques

Par Yoshinori KAMETAKA
Université de Kyôto
(Comm. by Kinjirô KUNUGI, M.J.A., Feb. 12, 1965)

1. Introduction. L'hypoellipticité des opérateurs paraboliques est déjà connue. Nous allons montrer la régularité au bord des solutions d'une équation parabolique vérifiant certaines conditions aux limites:

$$(1.1)\quad \begin{cases} Lu = \dfrac{\partial}{\partial t}u(t,x) - \sum\limits_{|\nu|\le 2m} a_\nu(t,x)\Big(\dfrac{\partial}{\partial x}\Big)^\nu u(t,x) \\ \quad = f(t,x),\ (t,x)\in U\cap G, \\ B_j u = \sum\limits_{|\nu|\le m_j} b_{j\nu}(t,x)\Big(\dfrac{\partial}{\partial x}\Big)^\nu u(t,x) = g_j(t,x),\ (t,x)\in U\cap \partial G, \\ \quad (j=1,2,\cdots,m;\ m_j\le 2m-1), \end{cases}$$

où $(t,x)\in R^n$ et G est un domaine de R^n dont la frontière ∂G—supposée contenant l'orgine—est définie dans un voisinage U de l'origine par

$$\varphi(t,x)=0,\qquad \sum_j \left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right|\neq 0,\qquad \text{pour } (t,x)\in U;\qquad \varphi(t,x)\in C^\infty(U).$$

Explicitons les conditions sur $\{L; B_j\}$:

1) $$\mathrm{Re}\sum_{|\nu|=2m} a_\nu(0,0)\xi^\nu\neq 0,\quad \xi\neq 0,$$

2) Soit $\eta(\in R^{n-1})$ la normale de l'hypersurface $\partial G\cap(t=0)$ à l'origine; Soit $\xi(\neq 0)$ un vecteur parallèle à l'hyperplan tangent de $\partial G\cap(t=0)$ à l'origine; Soit $\tau\in R^1$. Pour $(\xi,\tau)\neq(0,0)$ fixé arbitrairement, désignons $P(z)=i\tau-(-1)^m\sum\limits_{|\nu|=2m} a_\nu(0,0)(\xi+z\eta)^\nu$. Nous imposons la condition suivante: Il existe justement m racines $z_j(\xi,\tau)$ $(j=1,2,\cdots,m)$ de $P(z)=0$ ayant la partie imaginaire positive et m racines z_j $(j=m+1,\cdots,2m)$ dont la partie imaginaire soit négative. Posons $P_+(z)=\prod\limits_{j=1}^m(z-z_j)$, $P_-(z)=\prod\limits_{j=m+1}^{2m}(z-z_j)$. Alors $Q_j(z)=\sum\limits_{|\nu|=m_j} b_{j\nu}(0,0)(\xi+z\eta)^\nu$ $(j=1,2,\cdots,m)$ sont linéairement indépendants modulo $P_+(z)$ et en même temps modulo $P_-(z)$.

3) $$a_\nu(t,x)\in C(\overline{U\cap G}),\quad b_{j\nu}(t,x)\in C(U\cap\partial G).$$

Enonçons

Théorème 1. (*Hypoellipticité au bord*). Soit u une solution de (1.1) telle que $\dfrac{\partial}{\partial t}u$, $\Big(\dfrac{\partial}{\partial x}\Big)^\nu u\in L^2(U\cap G)$, $|\nu|\le 2m$, alors si $f\in$