66. *Sur une Représentation de la Fonction Delta de Dirac. II*

Par Shizu NAKANISHI

Université d'Osaka Préfecture

(Comm. by Kinjirô KUNUGI, M.J.A., April 12, 1965)

Commençons par remarquer que Théorème 1 donné dans la Note I[1] précédente subsiste de même *pour toute fonction* $\varphi(x)$ *intégrable au sens de Lebesque (pas nécessairement bornée) et continue au point* $x=0$.

En effect, puisque la fonction $\varphi(x)$ est continue au point $x=0$, il existe un entier positif n_0 et un nombre N tels que $|\varphi(x)|<N$ dans l'intervalle $0\leq x\leq 1/n_0$. Désignons par M l'integrale de la fonction $|\varphi(x)|$. Désignons par $\{e_n\}$ une suite monotone décroissante des nombres positives tels qu'on ait $\int_E|\varphi(x)|\,dx<e_n$, quel que soit l'ensemble E dont la mesure lebesguinne est inférieur à $1/n$. On voit aussitôt qu'il suffit de montrer qu'it existe une suite des nombres positives $\{\varepsilon_n^*\}$ convergeant vers 0 telle qu'on ait $\int_B|f_n(x)|<\varepsilon_n^*$ pour tout ensemble B dont la mesure $\nu(B)$ est inférieur à $\nu(CA_n)$. On a d'abord

$$\begin{aligned}I_0&=\int_B\Big|\sum_{j=1}^{n}(j+1)\,\eta_j(x)\,\varphi(x)\Big|\,dx\\&=\sum_{j=1}^{n_0-1}(j+1)\int_B\eta_j(x)\,|\varphi(x)|\,dx+\sum_{j=n_0}^{n}(j+1)\int_B\eta_j(x)\,|\varphi(x)|\,dx\\&\leq n_0\int_{B_1\cup B_2}|\varphi(x)|\,dx+(n+1)\,N\cdot\mathrm{mes}(B_1\cup B_2)\leq n_0e_n+N/(n+1).\end{aligned}$$

Posons maintenant $B_{ji}=B\cap\{x;\,a_{j,j-i-1}<x\leq a_{j,j-i}\}$ et $B_{ji}^*=\{\lambda_{ji}(x);\,x\in B_{ji}\}$. On a alors mes $B_{ji}^*=j(j^2-1)/i(i+1)\cdot$mes $B_{ji}\leq j(j^2-1)$ mes B_{ji}. Donc, on a $\sum_{i=1}^{j-1}$ mes $B_{ji}^*=j(j^2-1)\sum_{i=1}^{j-1}$ mes $B_{ji}\leq j(j^2-1)/(n+1)^2$, d'où

$$\begin{aligned}I_1&=\sum_{j=2}^{n_0}\sum_{i=1}^{j-1}\frac{i(i+1)}{j(j-1)}\int_{B_{ji}}|\varphi(\lambda_{ji}(x))|\,\lambda'_{ji}(x)\,dx\\&\leq n_0(n_0+1)\sum_{j=2}^{n_0}\frac{1}{j(j-1)}\sum_{i=1}^{j-1}\int_{B_{ji}^*}|\varphi(x)|\,dx\\&\leq n_0(n_0+1)\sum_{j=2}^{n_0}\frac{j(j^2-1)e_n}{j(j-1)}<(n_0+1)^4e_n.\end{aligned}$$

Ensuite, on a

---

1) S. Nakanishi: Sur une Représentation de la Fonction Delta de Dirac. I. Proc. Japan Acad., **41**, 138-140 (1965).