126. Sur les Algèbres de Lukasiewicz Injectives

Par Luiz MONTEIRO
Institut de Matemática Universidad Nacional
del Sur, Bahia Blanca

(Comm. by Kinjirô KUNUGI, M.J.A., Sept. 13, 1965)

A. Monteiro a proposé[1] de déterminer les algèbres de Lukasiewicz (trivalentes) qui sont injectives et il a conjecturé qu'elles doivent être les algèbres complètes et centrées. Nous avons montré non seulement qu'il en est ainsi, mais aussi que ce résultat peut être considéré comme une conséquence d'un important théorème de Roman Sikorski [8].

Nous supposerons connues certaines notions sur les algèbres de Boole et sur les algèbres de Lukasiewicz (voir [3]-[7]).

Les opérateurs de possibilité (M), de nécessité (ν) et de négation (N) seront representés dans cette note respectivement par $\nabla, \Delta, \sim$.

Un centre d'une algèbre de Lukasiewicz A est un élément $c \in A$ tel que $\sim c = c$.[2] D'après Moisil A ne peut avoir qu'un seul centre.

Si A a un centre c, Moisil [5] a montré que pour tout $x \in A$: $x = \Delta x \vee (c \wedge \nabla x \wedge \nabla \sim x)$.

Remarquons que

$$x = (\Delta x \vee c) \wedge (\Delta x \vee \nabla x) \wedge (\Delta x \vee \nabla \sim x)$$

et comme $\Delta x \vee \nabla x = \nabla x$; $\Delta x \vee \nabla \sim x = \Delta x \vee \sim \Delta x = 1$, alors on peut écrire plus simplement:

$$x = (\Delta x \vee c) \wedge \nabla x$$

ou ce qui est équivalent

$$x = (\nabla x \wedge c) \vee \Delta x.$$

Un élément $k \in A$ sera dit booléen si k a un complément, c'est-à-dire s'il existe $k' \in A$ tel que $k \vee k' = 1, k \wedge k' = 0$. S'il en est ainsi on a $k' = \sim k$. D'après Moisil [3] pour qu'un élément x soit booléen il faut et il suffit que $\nabla x = x$, ou ce qui revient au même $\Delta x = x$.

Représentons par $K(A)$ l'algèbre de Boole des éléments booléens de l'algèbre de Lukasiewicz A.

1.1. *LEMME: Si C est une algèbre de Lukasiewicz complète,*[3] *alors l'algèbre de Boole $K(C)$ est complète.*

DEMONSTRATION. Soit $\{k_i\}_{i \in I}$ une famille d'éléments de $K(C)$, et soit $k = \bigvee_{i \in I} k_i$. Montrons que $k \in K(C)$. En effet comme $k_i \leq k$ pour tout $i \in I$, alors, Δ étant monotone, nous pouvons écrire:

1) Dans un cour sur les Algèbres de Lukasiewicz réalisé pendant le premier semestre de 1963 à l'Universidad Nacional del Sur.

2) Voir [3] p. 446.

3) C'est-à-dire le réticulé C est complet.