193. Über die Zerlegbarkeit von nichtkommutativen Verbänden in kommutative Teilverbände

Von M. D. GERHARDTS

in Remscheid

(Comm. by Kinjirô KUNUGI, M.J.A., Dec. 13, 1965)

Einleitung. Die Theorie der nichtkommutativen Verbände wurde begründet von Pascual Jordan, der auf die Bedeutung dieser Algebren für die Untersuchung quantenphysikalischer Probleme hinwies und in zahlreichen Arbeiten grundlegende Betrachtungen über ihre Struktur anstellte. Unabhängig von Jordan und Mitarbeitern (E. Witt, W. Böge) hat auch S. Matsushita nichtkommutative verbandsähnliche Algebren untersucht.

Die Jordansche Theorie verhält sich zur Verbandstheorie wie die Gruppentheorie zur engeren Theorie der abelschen Gruppen. Wie in der Gruppentheorie das Vorhandensein kommutativer Untergruppen eine gewisse Bedeutung für die Struktur einer Gruppe hat, so ist auch in der Theorie der nichtkommutativen Verbände die Existenz kommutativer Unteralgebren für strukturelle Untersuchungen dieser Algebra von einigem Interesse. Eine sehr weitgehende Frage dieses Problemkreises ist die, unter welchen Bedingungen sich nichtkommutative Verbände (Schiefverbände) vollständig in nichttriviale kommutative Teilverbände zerlegen lassen. Nach einer früheren Mitteilung [2] ist für diese Zerlegbarkeit z.B. *hinreichend*, daß der Schiefverband distributiv ist. In Verallgemeinerung eines Satzes von G. Birkhoff haben in diesem Falle die entstehenden Verbände noch die zusätzliche Eigenschaft der Nichtexistenz gewisser fünfelementiger Teilverbände. Die Distributivität ist indes keineswegs *notwendig* für die geforderte Zerlegbarkeit, denn in jedem nichtdistributiven, aber kommutativen Verband ist diese ja trivialerweise gegeben. Eine hinreichende *und* notwendige Bedingung muß daher eine Abschwächung sowohl des Distributiv- als auch des Kommutativgesetzes sein. Das Hauptergebnis der vorliegenden Arbeit ist die Formulierung des in Rede stehenden Zerlegbarkeitskriteriums:

Für je drei Elemente a, b, c, eines Schiefverbandes gelte

$$(T_\wedge)\ (c\vee a\vee b)\wedge(b\vee a)=a\vee b \quad \textit{und}$$

$$(T_\vee)\ (a\wedge b)\vee(b\wedge a\wedge c)=b\wedge a.$$

Darüber hinaus werden durch Betrachtung geeigneter Kongruenzklassen und Ideale einige weitere Erkenntnisse über die Struktur von nichtkommutativen Verbänden gewonnen.

§ 1. Ω-Klassen und K-Ideale in Schiefverbänden. Def. 1.