32. *Sur le théorème de la continuité dans l'espace de deux variables complexes. IV*

Par Ikuo KIMURA

Université de Kôbé

(Comm. by Kinjirô KUNUGI, M.J.A., Feb. 12, 1966)

Introduction. Nous avons considéré jusqu'au présent les quatre sortes de pseudoconvexité par rapport à une direction complexe [1]$\sim$[3], et montré deux équivalences entre eux. L'équivalence dernière qui reste sans d'être prouvée, est démontrée dans cette présente Note, de sorte que toutes les sortes de pseudoconvexité, introduites dans [1]$\sim$[3], sont mutuellement équivalentes.

La pseudoconvexité (III). Soit D un domaine univalent dans l'espace de deux variables w, z. Comme on l'a vu dans l'Introduction, pour démontrer l'équivalence mutuelle des quatre définitions, il suffit d'établir le lemme suivant.

Lemme. *Le domaine D est pseudoconvexe par rapport* à w, *si et seulement si D est pseudoconvexe* (III) *par rapport* à w.

Preuve. Nous employons les définitions et les notations introduites dans les lemmes 1, 2, 3 de [3], sans aucune explication nouvelle. En vertu du théorème de [3], il suffit de prouver qu'un domaine est pseudoconvexe (II) par rapport à w, s'il est pseudoconvexe (III) par rapport à w. Pour raisonner par l'absurde, supposons que cela ne soit pas vrai. Alors d'après le lemme 1, [3], il existe un domaine D, des domaines cylindriques C, C_1, C_2, et une fonction $p(z)$ satisfaisant aux conditions 1°, 2°, 3° du même lemme ($p(z)\not\equiv cte.$).

(1) Considérons l'ensemble $A_2=\{(|z|, |w|)\,|\,(w, z)\in A\}$. Soit $y=k(x)$ l'équation représentant la frontière inférieure du plus petit ensemble convexe contenant A_2. Si l'on emploie la fonction $\varphi(z)=z$ pour $\varphi(z)$ dans le lemme 2, [3], on voit que $k(x)$ est défini et strictement croissant dans un intervalle fermé $[|b|, |c|]$, où $|b|=\max.\{|z|\,|\,(w, z)\in A, |w|=|a|\}$, $|a|$ désignant $\min.\{|w|\,|\,(w, z)\in A\}$, et où $|c|$ est assez voisin de $|b|$. Il existe un nombre positif s assez petit, tel que $k(x)-sx$ atteigne son minimum à un seul point $x=x_0$ ($|b|\leqq x_0<|c|$). En effet, sinon, il existe des segments l_1 et l_2, appartenant à la courbe $y=k(x)$ tous les deux et aussi voisins du point $(|b|, k(|b|))$ que l'on veut, et d'ailleurs on peut les choisir de manière que leurs gradients a_1 et a_2 soient assez petits. Sur la courbe $y=k(x)$, il y a un point p entre l_1 et l_2, et n'étant contenu dans aucun segment appartenant à cette courbe. (En effet, sinon,