72. *Sur la méthode des espaces rangés. I*

By Kinjirô KUNUGI, M.J.A.

(Comm. April 12, 1966)

1. Considérons un espace aux voisinages, c'est-à-dire, un ensemble R non-vide, dont chaque point p possède une famille non-vide, des sousensembles de R, désignés par $V(p)$ et appellés voisinages du point p.

Rappelons-nous la notion "profondeur" d'un espace. Étant donné un point p d'un espace R, nous disons qu'une suite monotone décroissante de voisinages $V_\alpha(p)$ est du type γ, où γ est un nombre ordinal de Cantor, si α parcourt tous les nombres ordinaux inférieurs à γ et que les relations d'inclusion $V_\alpha(p)\supseteq V_\beta(p)$ ont lieux pour tous les nombres α, β tels qu'on ait $0\leq\alpha\leq\beta<\gamma$:

$$V_0(p)\supseteq V_1(p)\supseteq V_2(p)\supseteq \cdots \supseteq V_\alpha(p)\supseteq \cdots \tag{1}$$
$$0\leq\alpha<\gamma.$$

Si, de plus, il n'y a aucun voisinage $U(p)$ de p, tel qu'on ait

$$\bigcap_\alpha V_\alpha(p)\supseteq U(p),$$

la suite (1) est appellée "maximale". Si un point p de R ne possède aucune suite de voisinages qui est maximale, nous disons que la profondeur de R au point p est "*l'infini actuel*". Dans les autre cas, nous définissons la *profondeur de R au point p* comme le plus petit nombre ordinal des types des suites monotone décroissantes et maximales des voisinages de p. Nous le désignons par

$$\omega(R, p).$$

Le plus petit nombre ordinal des profondeurs $\omega(R, p)$ de R aux points p, p étant variable, s'appelle "la *profondeur de l'espace R*". Nous le désignons par

$$\omega(R).$$

Il faut remarquer que $\omega(R)$ est égal ou bien à 1 ou bien à un nombre limite inaccessible.[1] Si le système des voisinages $\{V(p)\}$ du point p de R satisfait à l'axiome (B) de Hausdorff:[2]

(B) Pour deux voisinages $U(p)$, $V(p)$ quelconques de p, il en existe un troisième $W(p)$ tel que

$$W(p)\subseteq U(p)\cap V(p)$$

alors le premier cas est exclu.

Supposons dans la suite que l'axiome (B) de Hausdorff a toujours

1) F. Hausdorff: Grundzüge der Mengenlehre. Leipzig (Veit), p. 213 (1914).

2) Un nombre limite α est dit inaccessible, si, pour tout β tel que $\beta<\alpha$ et pour toute fonction $\alpha(\gamma)$ définie pour γ, $0\leq\gamma<\beta$ et telle que $0\leq\alpha(\gamma)<\alpha$, on a nécessairement $\sup_\gamma \alpha(\gamma)<\alpha$.