127. *Sur la pseudoconvexité par rapport à une direction.* II

Par Ikuo KIMURA
Université de Kôbé

(Comm. by Kinjirô KUNUGI, M.J.A., June 13, 1966)

3. Résultat principal. Avant poursuivre nos considérations, expliquons brièvement la notion du rayon de Hartogs d'une région.

Soit D une région dans l'espace de $z_1, z_2, \cdots, z_n$. Soit $z^0=(z_1^0, z_2^0, \cdots, z_n^0)$ un point de D; désignons par $D(z_1^0, z_2^0, \cdots, z_{n-1}^0)$ la section $\{z_n\,|\,(z_1^0, \cdots, z_{n-1}^0, z_n)\in D\}$ de D par le plan $z_i=z_i^0$, $i=1,2,\cdots,n-1$, et par $R_{z_n^0}(z_1^0, z_2^0, \cdots, z_{n-1}^0)$ la distance du point z_n^0 à la frontière de $D(z_1^0, z_2^0, \cdots, z_{n-1}^0)$. La fonction $R_{z_n}(z_1, z_2, \cdots, z_{n-1})$ est définie et semi-continue inférieurement dans D, et dite le rayon de Hartogs de D par rapport à z_n.

Dans les lemmes et les théorèmes suivants, pour des raisons de convenance, nous désignerons les variables de l'espace considéré par $z_1, z_2, \cdots, z_n$ ou bien $x, y_1, \cdots, y_{n-1}$ suivant les circonstances.

Nous avons le

Lemme 3. *Si une région D de l'espace $z_1, z_2, \cdots, z_n$ est pseudo-convexe par rapport aux variables $z_1, z_2, \cdots, z_{n-1}$, alors la fonction*

$$G(z_1, z_2, \cdots, z_n)=-\log R_{z_n}(z_1, z_2, \cdots, z_{n-1})$$

est plurisousharmonique dans D.

Preuve. $G(z_1, z_2, \cdots, z_n)$ est semi-continu supérieurement dans D. Donc il suffit de démontrer la sousharmonicité de la restriction de $G(z_1, z_2, \cdots, z_n)$ à une droite complexe L. On peut supposer que l'origine O se place sur L et que le point considéré est O.

1°. Soit L de la forme: $z_i=a_iz_1$, $(i=2, 3, \cdots, n)$. Considérons la transformation

$$Z_1=z_1,\ Z_i=z_i-a_iz_1,\ (i=2, 3, \cdots, n).$$

Si l'on désigne par D', L' les images de D, L, respectivement, L' est représenté par $Z_i=0$, $(i=2, 3, \cdots, n)$ et D' est pseudoconvexe par rapport à Z_1. Et pour $z_1, z_2, \cdots, z_{n-1}$ fixes, la transformation n'est d'autre qu'une translation du plan z_n. Donc, si l'on désigne par $R'_{Z_n}(Z_1, Z_2, \cdots, Z_{n-1})$ le rayon de Hartogs de D' par rapport à Z_n, on a

$$R'_{Z_n}(Z_1, \cdots, Z_{n-1})=R_{z_n}(z_1, \cdots, z_{n-1}).$$

En conséquence, on peut supposer, sans restreindre la généralité, que L est de la forme: $z_i=0$, $(i=2, 3, \cdots, n)$.

$G(z_1, 0, \cdots, 0)$ *n'atteint aucun maximum local dans un voisinage*