98. *Note sur les Espaces Spéciaux de Dirichlet*

par Masayuki ITÔ
Institut Mathématique, Université de Nagoya

(Comm. by Kinjirô KUNUGI, M.J.A., June 12, 1967)

1. Il est bien connu que les espaces de Dirichlet ont beaucoup de propriétés importantes dans la théorie du potentiel. Mais, nous n'avons pas connu la condition qui décide si un noyau donné est un noyau d'un espace de Dirichlet. Dans cette note, d'abord nous considérerons un espace fonctionel invariable $\mathfrak{X}$ sur l'espace euclidien $R^n(n\geq 1)$. Alors, nous obtiendrons que tout élément de $\mathfrak{X}$ soit égal à une constante ou qu'on puisse associer un espace spécial $D(\mathfrak{X})$ de Dirichlet sur R^n et un espace $\mathfrak{X}_c$ constitué par des constantes, satisfait à $\mathfrak{X}=D(\mathfrak{X})\oplus\mathfrak{X}_c$ si le principe de domination est satisfait dans $\mathfrak{X}$. Employant ce résultat, nous obtiendrons qu'un noyau positif, symétrique et continu (au sens large) k de convolution sur R^n soit égal à une constante non-négative ou qu'on puisse associer un noyau continu (au sens large) k_0 d'un espace spécial de Dirichlet et une constante non-négative $C(k)$ satisfait à $k=k_0+C(k)$ si ce noyau k satisfait au principe de domination.

2. D'abord, nous donnerons des notations d'ensembles de fonctions. On désignera par C_K l'espace des fonctions finies et continues à support compact muni de la topologie usuelle, et par C_K^+ l'ensemble des éléments non-négatifs de C_K. De plus, on désignera par M l'ensemble des fonctions bornées et mesurables à support compact, et par M^+ l'ensemble des éléments non-négatifs de M. Nous donnerons la définitions d'un espace fonctionel invariable (sur R^n) et la définition d'un espace spécial de Dirichlet (sur R^n).[1)]

Définition 1. Un espace hilbertien $\mathfrak{X}$ s'appelle un espace fonctionel invariable (sur R^n) si tout élément de $\mathfrak{X}$ est une fonction réelle et localement sommable, verifiant les conditions suivants:

(a) A tout compact K de R^n, on peut associer une constante positive $A(K)$ telle qu'on ait, pour toute u de $\mathfrak{X}$,

$$\int_K |u(x)|\, dx\leq A(K)\, \|u\|.$$

(b) A toute u de $\mathfrak{X}$ et tout point x de R^n, on a $\tau_x u\in\mathfrak{X}$ et $\|\tau_x u\|=\|u\|$, ou $\tau_x u(y)=u(y-x)$.

Définition 2. Un espace fonctionel invariable $\mathfrak{X}$ s'appelle un

1) On peut donner les mêmes définitions sur un groupe abélien localement compact.