73. Stetige Konvergenz und der Satz von Ascoli und Arzelà. VI

Von Harry POPPE
Sektion Mathematik, Ernst-Moritz Arndt Universität, D. D. R.

(Comm. by Kinjirô KUNUGI, M. J. A., May 13, 1968)

Wir ziehen zum Schluss noch einige Folgerungen aus (6) Y, Z seien L-Räume, Z erfülle das Axiom L III und sei Hausdorffsch (Axiom LT_2). Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(I) Es sei lim eine Limesabbildung für $C(Y, Z)$, die größer als die Limesabbildung p-lim der punktweisen Konvergenz ist (d.h. aus der Konvergenz bezüglich lim folgt die Konvergenz bezüglich p-lim). Es sei $(C(Y, Z), \lim)$ ein L-Raum. Ist dann $H \subset C(Y, Z)$ bezüglich lim kompakt, so folgt, daß H gleichstetig ist.

(II) Für jeden L-Raum X mit der Eigenschaft, daß jeder konvergente Ultrafilter in X eine kompakte Menge enthält, gilt: Ist $\tilde{f} \in C(X, (C(Y, Z), \lim))$, so folgt $f = h^{-1}(\tilde{f}) \in C(X \times Y, Z)$. (Es ist $f(x, y) = \tilde{f}(x)(y)$). Die Aussage (6) gilt insbesondere, wenn Y ein beliebiger topologischer Raum, Z ein Hausdorffscher topologischer Raum und lim die einer Topologie τ für $C(Y, Z)$ (mit $\tau \supset \tau_p$, τ_p die Topologie der punktweisen Konvergenz) unterliegende Topologie ist.

Für τ_c erhält man:

(12) Y sei ein beliebiger, Z ein Hausdorffscher topologischer Raum. Dann sind die Aussagen äquivalent:

(I) Jede bezüglich τ_c kompakte Menge $H \subset C(Y, Z)$ ist gleichstetig (evenly continuous).

(II) Für jeden topologischen Raum X mit der Eigenschaft, daß jeder konvergente Ultrafilter eine kompakte Menge von X enthält, gilt: $h(C(X \times Y, Z)) = C(X, (C(Y, Z), \tau_c))$. Ist $H \subset C(Y, Z)$ τ_c-kompakt, so folgt (a): H ist abgeschlossen in $C(Y, Z)$ bezüglich τ_c, (b): $\overline{H(y)}$ ist kompakt für jedes $y \in Y$. Ist nun Z zusätzlich regulär und gelten für $H \subset C(Y, Z)$ die Bedingungen (a), (b), und (c): H ist gleichstetig, so folgt aus Satz (11), (III), 1., β), daß H kompakt bezüglich τ_c ist. Ferner erfüllt jeder kompakte Raum X die in (II) genannte Bedingung: (+) Jeder konvergente Ultrafilter in X enthält eine kompakte Menge. Folglich erhält man als Spezialfall den Satz (5) von Noble.

Aus (12) und aus (11), (III), 2. erhalten wir

(13) X, Y, Z seien topologische Räume, X genüge der Bedingung (*), Y sei ein Hausdorffscher k-Raum und Z sei Hausdorffsch. Dann