151. *Ueber einen Differentialoperator in der Algebra der komplexen 4-Matrizen*

Von Josef WEIER

(Comm. by Kinjirô KUNUGI, M. J. A., Sept. 12, 1968)

Sei Δ der unten erklärte Kählersche Differentialoperator. Sei $(\gamma_1, \cdots, \gamma_4)$ ein Quadrupel von Diracmatrizen. *Wie kommutieren die γ_ν mit dem Kählerschen Differentialoperator:*

$$\Delta\gamma_\nu - \gamma_\nu\Delta = ?$$

Mit dieser Frage befasst sich diese Arbeit. Es wird gezeigt, dass bei passender Wahl der Diracquadrupels gilt:

$$\begin{aligned}&(\gamma_\nu\Delta - \Delta\gamma_\nu)s\\ &= e_\nu \wedge \operatorname{div} s + \operatorname{div}(e_\nu \wedge s) - \operatorname{rot}(e_\nu \cdot s) \qquad \text{für } \nu = 1, 2,\\ &= ie_{\nu-1} \wedge \operatorname{div} s + i \operatorname{div}(e_{\nu-1} \wedge s) + i \operatorname{rot}(e_{\nu-1} \cdot s) \qquad \text{für } \nu = 3, 4.\end{aligned}$$

Dabei bezeichnet C_2 den komplexen 2-Raum, es ist e_j für $j=1, 2$ der Vektor (δ_j^1, δ_j^2) aus C_2, und s ist eine komplexe 2-Form über C_2.

Sei V der von den Tensoren $1, e_1, e_2$, und $e_1 \wedge e_2$ aufgespannte 4-dimensionale lineare Raum über den komplexen Zahlen. Dann kann man offenbar annehmen, wie es unten geschieht, dass die γ_ν Selbstabbildungen von V sind. Für jedes Elements ω aus V sei

$$\beta_1(\omega) = e_1 \wedge \omega + e_1 \cdot \omega, \qquad \beta_2(\omega) = e_2 \wedge \omega + e_2 \cdot \omega,$$
$$\beta_3(\omega) = i(e_1 \wedge \omega - e_1 \cdot \omega), \quad \beta_4(\omega) = i(e_2 \wedge \omega - e_1 \cdot \omega).$$

Wie man sich leicht überlegt, gilt $\beta_\lambda\beta_\mu + \beta_\mu\beta_\lambda = 2\delta_{\lambda\mu}$. Man Kann also die γ_ν durch die β_ν realisieren.

Es bezeichne E_n den rellen n-Zahlenraum. In einem gradlinigen koordinatensysteme von E_n sei $t = t_{\lambda_1 \cdots \lambda_r} dx^{\lambda_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\lambda_r}$ eine Differentialform über E_n. Mit

$$d_k t = (\partial_k t_{\lambda_1 \cdots \lambda_r}) dx^{\lambda_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\lambda_r}$$

kann man das Differential dt von t auch als $dt = dx^k \wedge d_k t$ schreiben. Mit dem im ersten Abschnitt erklärten Cliffordprodukt $\vee$ bestimmt dann

$$\Delta t = dx^k \vee d_k t$$

den Kählerschen Differentialoperator Δ. In [1] und [2] ist dieser Operator für Aggregate erklärt, die wesentlich allgemeiner als Differentialformen sind. Ersetzt man E_n durch C_2, so änder sich an den vorstehen den Erklärungen nichts wesentlich. Im Literaturverzeichnis ist noch eine Arbeit von Uhlmann angegeben, die sich methodisch mit den folgenden Untersuchungen berührt.

1. Das Cliffordprodukt schiefsymmetrischer Tensoren. Sei e_j