214. *Sur une certaine classe d'opérateurs différentiels ordinaires, elliptiques et dégénérés*

Par Norio SHIMAKURA

(Comm. by Kinjirô KUNUGI, M. J. A., Nov. 12, 1968)

1. Opérateurs traités L et espaces de Sobolev avec poids W_k^m. Désignons par $\boldsymbol{R}^1$ et par $\boldsymbol{R}_+^1$ les ensembles des nombres réels et des nombres positifs respectivement. Leur point générique est noté par t. Soient $L^2(\boldsymbol{R}^1)$, $L^2(\boldsymbol{R}_+^1)$ et $H^r(\boldsymbol{R}_+^1)$ (r: entier $\geqq 0$) l'espace des fonctions mesurables carrés sommables sur $\boldsymbol{R}^1$, celui sur $\boldsymbol{R}_+^1$ et l'espace de Sobolev habituel d'ordre r sur $\boldsymbol{C}_+^1$ respectivement. La transformée de Fourier de $f(t) \in L^2(\boldsymbol{R}^1)$ est définie par $\mathcal{F}f(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-it\tau}f(t)dt$.

Nous traitons dans ce mémoire un opérateur L de la forme

$$Lu(t) \equiv L(t\,; D_t)u(t) \equiv \sum_{h=0}^{k} P^h(D_t)\{t^{k-h}u(t)\} \tag{1}$$

sur la demi-droite $\boldsymbol{R}_+^1$, où $D_t=i^{-1}d/dt$, et

(i) *Les $P^h(D_t)$ $(0\leqq h\leqq k)$ sont des opérateurs différentiels ordinaires d'ordre $\leqq(m-h)$ à coefficients constants complexes*:

$$P^h(D_t)=\sum_{j=0}^{m-h} p_j^h D_t^j, \quad (p_j^h \in \boldsymbol{C},\ 0\leqq h\leqq k \text{ et } 0\leqq j\leqq m-h) \tag{2}$$

et les k et m sont deux entiers donnés tels que

$$0<k<m\,; \tag{3}$$

(ii) *Parmi eux, $P^0(D_t)$ est un opérateur elliptique d'ordre m avec $p_m^0=1$, c'est-à-dire, le polynôme $P^0(\tau)$ ne s'annule jamais sur $\boldsymbol{R}^1$.*

Soient m_+ et m_- les nombres des zéros du polynôme $P^0(\tau)$ situés dans les demi-espaces $\mathrm{Im}\tau>0$ et $\mathrm{Im}\tau<0$ respectivement. On a alors $m=m_+ + m_-$. Le cas où $m_+=0$ ou $m_-=0$ est permis.

Nous définissons ensuite l'espace de Sobolev avec poids W_k^m sur lequel opère L. Etant donnés, en général, deux entiers λ et μ tels que $0\leqq\mu\leqq\lambda$, nous désignons par W_μ^λ l'espace vectoriel complexe défini par

$$W_\mu^\lambda=\{u(t) \in H^{\lambda-\mu}(\boldsymbol{R}_+^1)\,;\ t^\mu u(t) \in H^\lambda(\boldsymbol{R}_+^1)\} \tag{4}$$

muni de la structure hilbertienne naturelle. Cet espace peut être identifié avec un sous-espace vectoriel de $L^2(\boldsymbol{R}^1)$ par le prolongement par 0 hors de $\boldsymbol{R}_+^1$ de chaque élément. Notons cette application: $W_\mu^\lambda \to L^2(\boldsymbol{R}^1)$ par $u(t)\to\tilde{u}(t)$. Et, si $0<\mu\leqq\lambda$, alors l'inclusion par identification $W_\mu^\lambda \subset W_{\mu-1}^{\lambda-1}$ est continue.

Quel que soit $u(t)$ élément de W_μ^λ, il existe des valeurs suivantes qui sont majorées par la norme de $u(t)$ dans W_μ^λ: