105. *Tauber-Konstanten für die Verfahren C_α, A_λ und L. I*

Von Hubert TIETZ
Mathematisches Institut, Universität Stuttgart, Deutschland

(Comm. by Kinjirô KUNUGI, M. J. A., June 10, 1969)

1. Einleitung. Wir betrachten die Cesàro-Verfahren $C_\alpha(\alpha>0)$, die verallgemeinerten Abel-Verfahren $A_\lambda(\lambda>-1)$ und das Logarithmische Verfahren L zur Limitierung komplexer Folgen

$$(1.1)\qquad \{s_n\} \quad \text{mit } s_n=a_0+\cdots+a_n \qquad \text{für} \quad n=0,1,\cdots.$$

Die Folge (1.1) heißt C_α-limitierbar zum Wert s, wenn, mit

$$(1.2)\qquad C_\alpha(m)=\binom{m+\alpha}{m}^{-1}\sum_{\nu=0}^{m}\binom{m-\nu+\alpha-1}{m-\nu}s_\nu \qquad (\alpha>0),$$

$\lim_{m\to\infty} C_\alpha(m)=s$ ist; sie heißt A_λ-limitierbar zum Wert s, wenn

$$(1.3)\qquad A_\lambda(x)=(1+x)^{-\lambda-1}\sum_{\nu=0}^{\infty}\binom{\nu+\lambda}{\nu}\left(1-\frac{1}{1+x}\right)^{\nu}s_\nu \qquad (\lambda>-1)$$

für alle $x>0$ existiert und $\lim_{x\to\infty} A_\lambda(x)=s$ ist; und sie heißt L-limitierbar zum Wert s, wenn

$$(1.4)\qquad L(x)=\frac{1}{\log(1+x)}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\nu+1}\left(1-\frac{1}{1+x}\right)^{\nu+1}s_\nu$$

für alle $x>0$ existiert und $\lim_{x\to\infty} L(x)=s$ ist. Borwein [2, 3] vergleicht die Wirkfelder dieser Verfahren. Er findet, daß - in der Reihenfolge der obigen Aufzählung - jedes nachfolgende Verfahren echt stärker ist als jedes voranstehende, und daß die Wirkfelder der A_λ-Verfahren mit fallendem λ wachsen. Nehmen wir das klassische Resultat über die Größe der C_α-Wirkfelder noch dazu und bezeichnen wir die Wirkfelder mit den gleichen Buchstaben wie die Verfahren selbst, so gilt insgesamt

$$C_{\alpha'}\subset C_{\alpha''}\subset A_{\lambda'}\subset A_{\lambda''}\subset L \quad \text{für} \quad 0<\alpha'<\alpha'' \quad \text{und} \quad -1<\lambda''<\lambda'.$$

Ist V ein Verfahren zur Limitierung von Folgen (1.1), so nennen wir eine Tauber-Bedingung der Gestalt

$$(1.5)\qquad \lambda_n a_n=O(1) \qquad (n\to\infty)$$

nicht-optimal für V, wenn es eine gegen Unendlich strebende Folge $\{\varphi_n\}$ $(n=0,1,\cdots)$ so gibt, daß auch

$$(1.6)\qquad \lambda_n a_n=O(\varphi_n) \qquad (n\to\infty)$$

eine Tauber-Bedingung für V ist. Bekanntlich ist (1.5) mit $\lambda_n=n\psi_n$ für C_α und A_λ sowie mit $\lambda_n=n\psi_n\log n$ für L in diesem Sinne nichtoptimal, wenn $\{\psi_n\}$ $(n=0,1,\cdots)$ irgendeine gegen Unendlich strebende Zahlenfolge ist; denn dann ist (1.6) mit $\varphi_n=\psi_n$ $(n=0,1,\cdots)$ ebenfalls